

逻辑判断在中学数学的应用

北京宏志中学 徐德前 xudeqian524@sohu.com

第一部分 基本逻辑运算简介

一、逻辑代数

逻辑代数是讨论逻辑关系的一门学科，它是分析和设计逻辑电路的数学基础。逻辑代数也是用字母表示变量，但是逻辑代数和普通代数有着根本的区别。逻辑代数中的逻辑变量只有两种可能取值——0和1，而且这里的0和1不同于普通代数中的0和1。它只表示两种对立的逻辑状态，并不表示数量的大小。

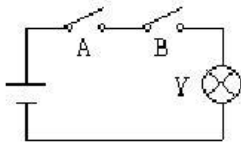
二、基本逻辑函数及运算

基本逻辑：与逻辑、或逻辑、非逻辑

基本运算：与运算、或运算、非运算

1、与运算（逻辑乘、与逻辑、逻辑与） AND

1)、当决定事物结果的全部条件同时具备时，结果才发生。



2)、开关闭合为条件，灯亮为结果。

以 A、B 表示开关：1 表示开关闭合，0 表示开关断开；

Y 表示灯：1 表示灯亮，0 表示灯不亮

电路功能表

A	B	Y
断开	断开	灭
断开	闭合	灭
闭合	断开	灭
闭合	闭合	亮

3)、电路真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(全 1 出 1，有 0 出 0)

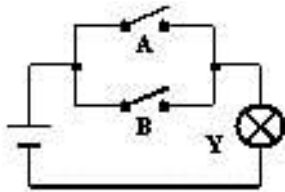
逻辑与的语法为：

当且仅当两个表达式 expression1 与 expression2 都为真时，其结果 result 才为真则当两个表达式中有一个为假时，其结果必为假 False。

4)、逻辑表达式： $Y=A \cdot B=AB$

2、或运算（逻辑加、或逻辑、逻辑或）OR

1)、决定事物结果的所有条件中，只要有一条件具备，结果就发生。



2)、电路功能表

A	B	Y
断开	断开	灭
断开	闭合	亮
闭合	断开	亮
闭合	闭合	亮

3)、电路真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(全0出0，有1出1)

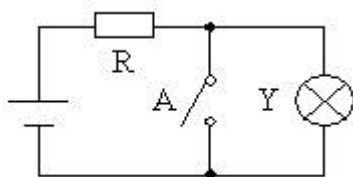
逻辑或的语法为：

当 or 两边的表达式中有一个为 True 时，结果 result 就为 TRUE；只有两个表达式均为 FALSE 时，其结果才为 False。

4)、逻辑表达式： $Y=A+B$

3、非运算（逻辑非、非逻辑、逻辑反）NOT

1)、条件具备，结果不发生；条件不具备，结果发生。



2)、电路功能表

A	Y
断开	亮
闭合	灭

3)、电路真值表

输入	输出
A	Y
0	1
1	0

4)、逻辑表达式： $Y=\bar{A}$

逻辑非的语法为：

Not 为单目运算符，后跟的 expression 为关系表达式或算术表达式。
当关系表达式为 True 时，其结果为 False；当关系表达式为 False 时，结果为 True。
当算术表达式取值为 1 时，结果为 0；当算术表达式取值为 0 时，结果为 1。

三)、复合逻辑运算

1、与非运算（先与后非） NAND

- 1)、条件全部具备，结果不发生；只要有一条件不具备，结果就发生。
- 2)、电路真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(全 1 出 0，有 0 出 1)

- 3)、逻辑表达式： $Y = \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (注意： $Y = \overline{A \cdot B} \neq \overline{A} \cdot \overline{B}$)

2、或非运算(先或后非) NOR

- 1)、条件全部不具备，结果发生；只要有一条件具备，结果就不发生。
- 2)、电路真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(全 0 出 1，有 1 出 0)

- 3)、逻辑表达式： $Y = \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (注意： $Y = \overline{A+B} \neq \overline{A} + \overline{B}$)

3、异或运算 XOR

- 1)、A、B 状态不同时，输出为 1；状态相同时，输出为 0
- 2)、真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 3)、逻辑表达

式：

$$Y = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B = \overline{A \odot B}$$

逻辑异或的语法为:就是当两个表达式的值不同时(即一个为 True,另一个为 FALSE),其结果为 True;当两个表达式的值相同(都为 True 或都为 False)时,结果为 False。也就是”异”则”真”,”同”则”假”

4、同或运算 (即逻辑等价 \leftrightarrow)

1)、A、B 状态相同时,输出为 1;状态不同时,输出为 0

注:异或、同或互为反函数(反运算)

2)、真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

同或运算(即逻辑等价 \leftrightarrow)的语法为:

逻辑”相等”与”异或”运算是一对互逆运算符,即当两个表达式的值相同(都为 True 或都为 False),其结果为 True;当两个表达式的值不同(一个为 True,另一个为 False)时,其结果为 False。只要表达式中有一个为 Null,则结果为 Null

3)、逻辑表达式: $Y = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$

5. 逻辑蕴含 (\Rightarrow)

1)、真值表

输入		输出
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

只有当第一个表达式 expression1 为 True,第二个表达式 expression2 为 False 时,结果才为 False,其他情况下结果均为 True。

注:逻辑运算的运算顺序

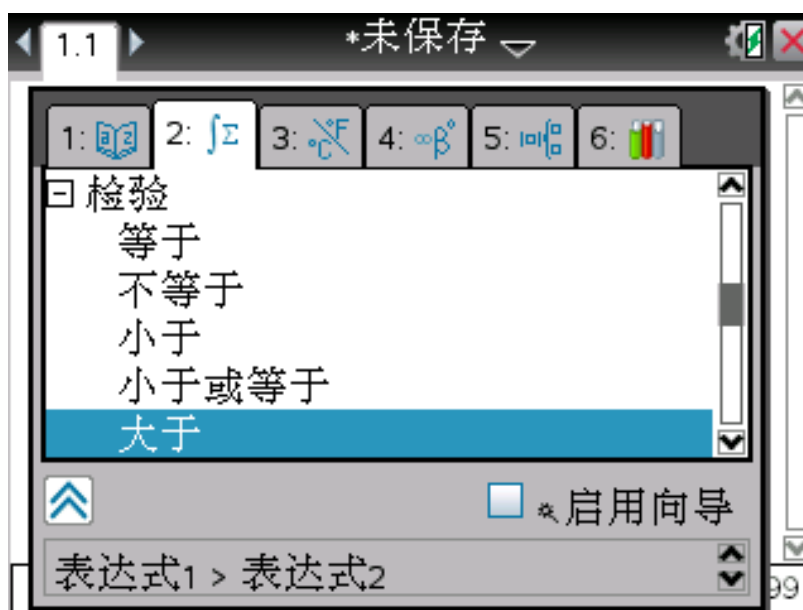
括号 \rightarrow 非 \rightarrow 与 \rightarrow 或

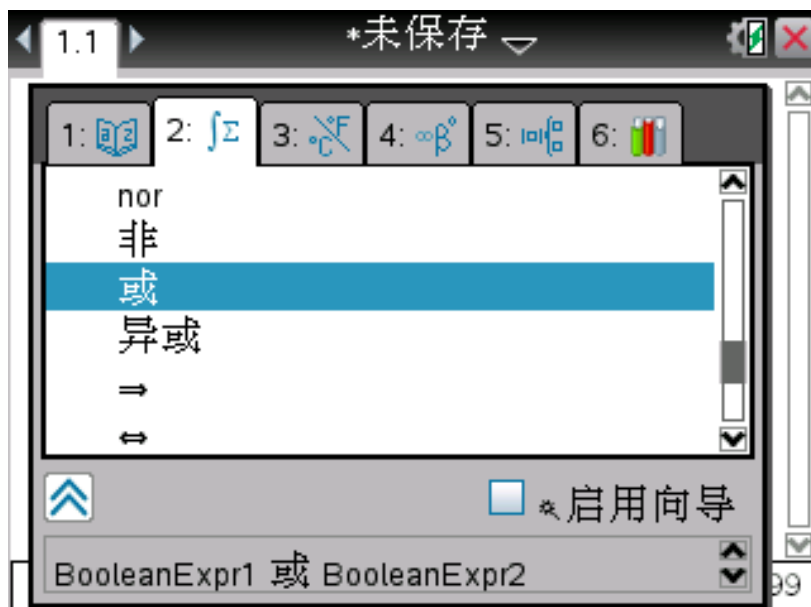
(括号 \rightarrow 非 \rightarrow 异或 (同或) \rightarrow 与 \rightarrow 或)

TI 图形计算器逻辑运算符号功能小结

基本逻辑运算（核心）			
运算	符号	逻辑表达式	集合运算表示
与运算（逻辑乘、逻辑与）	AND	$Y = A \cdot B = AB$	$A \cap B$
或运算（逻辑加、逻辑或）	OR	$Y = A + B$	$A \cup B$
非运算（逻辑非、逻辑反）	NOT	$Y = \bar{A}$	\bar{A}
复合逻辑运算（了解）			
运算	符号	逻辑表达式	集合运算表示
与非运算（与与运算互为反运算）	NAND	$Y = \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
或非运算（与或运算互为反运算）	NOR	$Y = \overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
异或运算	XOR	$Y = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$	$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
逻辑等价（与异或互为反运算）	\Leftrightarrow	$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$	$(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
逻辑蕴含	\Rightarrow	$A \Rightarrow B$	$\bar{A} \cup B$

注：TI 中相关运算从集合间运算的角度来理解。以下是命令和运算实例。





1.1 *未保存

$x \geq 2 \text{ and } x < 4$	$2 \leq x < 4$
$x \geq 2 \text{ or } x < 4$	true
not ($x \geq 2$)	$x < 2$
$x \geq 2 \text{ nand } x < 4$	$x < 2 \text{ or } x \geq 4$
$x \geq 2 \text{ nor } x < 4$	false
$x \geq 2 \text{ xor } x < 4$	$x < 2 \text{ or } x \geq 4$
$x \geq 2 \Leftrightarrow x < 4$	$2 \leq x < 4$

7/7

1.1 *未保存

not ($x \geq 2$)	$x < 2$
$x \geq 2 \text{ nand } x < 4$	$x < 2 \text{ or } x \geq 4$
$x \geq 2 \text{ nor } x < 4$	false
$x \geq 2 \text{ xor } x < 4$	$x < 2 \text{ or } x \geq 4$
$x \geq 2 \Leftrightarrow x < 4$	$2 \leq x < 4$
$x \geq 2 \Rightarrow x < 4$	$x < 4$

8/99

第二部分 逻辑判断在中学数学的应用

一、逻辑判断与推理举例

逻辑推理能力要求利用已知的条件，通过分析和判断，得到正确的答案。进行逻辑推理的前提是正确理解题意，使计算机进行正确推理的关键。逻辑问题与常见的数学问题不同，它需要使用逻辑表达式来表示各种逻辑关系。

例 1：谁是冠军？

甲乙丙丁四个人看比赛，
甲说：冠军不是 A 就是 B。
乙说：冠军绝不是 C。
丙说：D、E、F 都不是冠军。
丁说：冠军是 D、E、F 中的一个。

如果这四人中只有一个人猜对，判断谁是冠军

问题分析：用 1-6 分别表示 ABCDEF6 个人。用穷举法穷举各种可能，

程序与注释

```
For I,1,6,1          /*在 1 到 6 中穷举冠军*/
    0→k              /*k 累计说真话人数*/
    If i=1 or i=2 Then /*冠军不是 A 就是 B.，k 加 1*/
        k+1→k
    EndIf
    If Not (i=3) Then /*冠军绝不是 C, k 加 1*/
        k+1→k
    EndIf
    If i≠4 And i≠5 And i≠6 Then /*DEF 都不是冠军, k 加 1*/
        k+1→k
    EndIf
    If i=4 Or i=5 Or i=6 Then /*冠军是 D.E.F 中的一个, k 加 1*/
        k+1→k
    EndIf
    If k=1 Then
        Disp “冠军是”, i
    EndIf /*1 个人说真话, 则冠军正确*/
Endfor
运算结果是 冠军是 3 , 即冠军是 C.
```

```

guanjun()
-----
冠军是 3
-----
完成
[]

Define guanjun()=
Prgm
For i,1,6
  0 → k
  If i=1 or i=2 Then
    k+1 → k
  EndIf
  If not (i=3) Then
    k+1 → k
  EndIf
  If i≠4 and i≠5 and i≠6 Then
    k+1 → k
  EndIf
  If i=4 or i=5 or i=6 Then
    k+1 → k
  EndIf
  If k=1 Then
    Disp "冠军是",i
  EndIf
EndFor
EndPrgm

```

例 2: 有三对情侣结婚, 三个新郎为 A, B, C, 三个新娘为 X, Y, Z。有人不知道谁和谁结婚, 于是询问了六位新人中的三位, 听到这样的回答: A 说他将与 X 结婚; X 说她的未婚夫是 C; C 说将与 Z 结婚。这人听后知道他们在开玩笑, **全是假话**。请编程找出谁和谁结婚。

问题分析与算法分析

将 A, B, C 三人用 1,2,3, 表示, 将 X 和 A 结婚表示为 "x=1", 将 Y 不与 A 结婚表示为 "Y≠1"。题目中的叙述可以表示为

- X≠1 A 不与 X 结婚
- X≠3 X 的未婚夫不是 C
- Z≠3 C 不与 Z 结婚

题意还隐含着 X, Y, Z 三个新娘不能结为配偶, 则有

$$X \neq Y \text{ 且 } Y \neq Z \text{ 且 } X \neq Z$$

穷举各种可能情况, 代入上述表达式进行推理运算, 若假设的情况使上述表达式结果均为 "真", 则假设情况就是正确的结果。

程序与注释

```

For x,1,3 /*穷举 x 的全部可能配偶*/
  For y,1,3 /*穷举 y 的全部可能配偶*/
    For z,1,3 /*穷举 z 的全部可能配偶*/
      If x≠1 and x≠3 and z≠3 and x≠y and y≠z and x≠z
/*判断配偶是否满足题意*/
      Then
        Disp "X 的结婚对象是",char(65+x-1) /*打印判断结果*/
        Disp "Y 的结婚对象是",char(65+y-1)

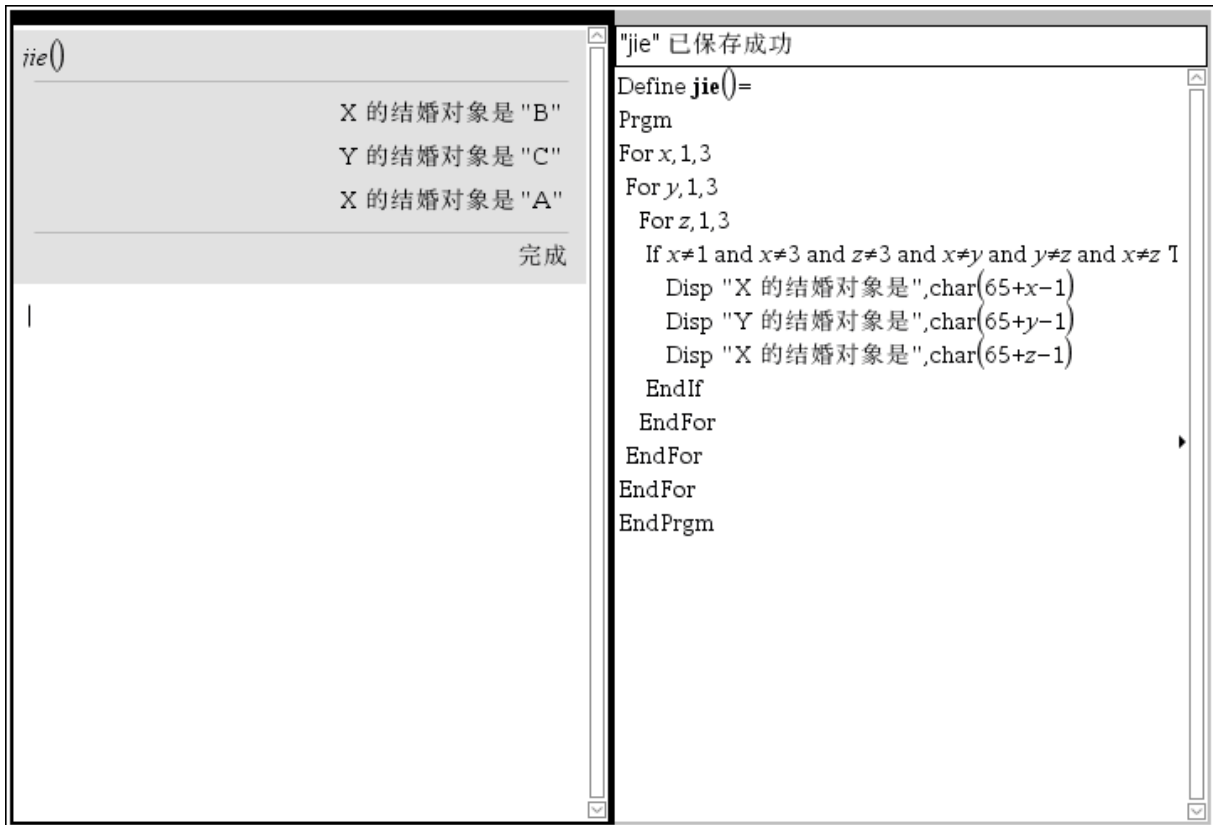
```



```

Disp "Z 的结婚对象是",char(65+z-1)
Endif
Endfor
Endfor
Endfor
运算结果是          备注: Char(65)    "A"

```



练习：谁在说谎

张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三和李四都在说谎。现在问：这三人中到底谁说的是真话，谁说的是假话？

问题分析与算法设计

分析题目每个人都有可能说的是真话，也有可能说的是假话，这就需要对每个人所说的话进行分别判断。假设三个人所说的话的真假用变量 A、B、C 表示，等于 1 表示该人说的是真话，0 表示这个人说的是假话。由题目可以得到：

*张三说李四在说谎

张三说的是真话： $a=1$ and $b=0$ 或 张三说的是假话： $a=0$ and $b=1$

*李四说王五在说谎

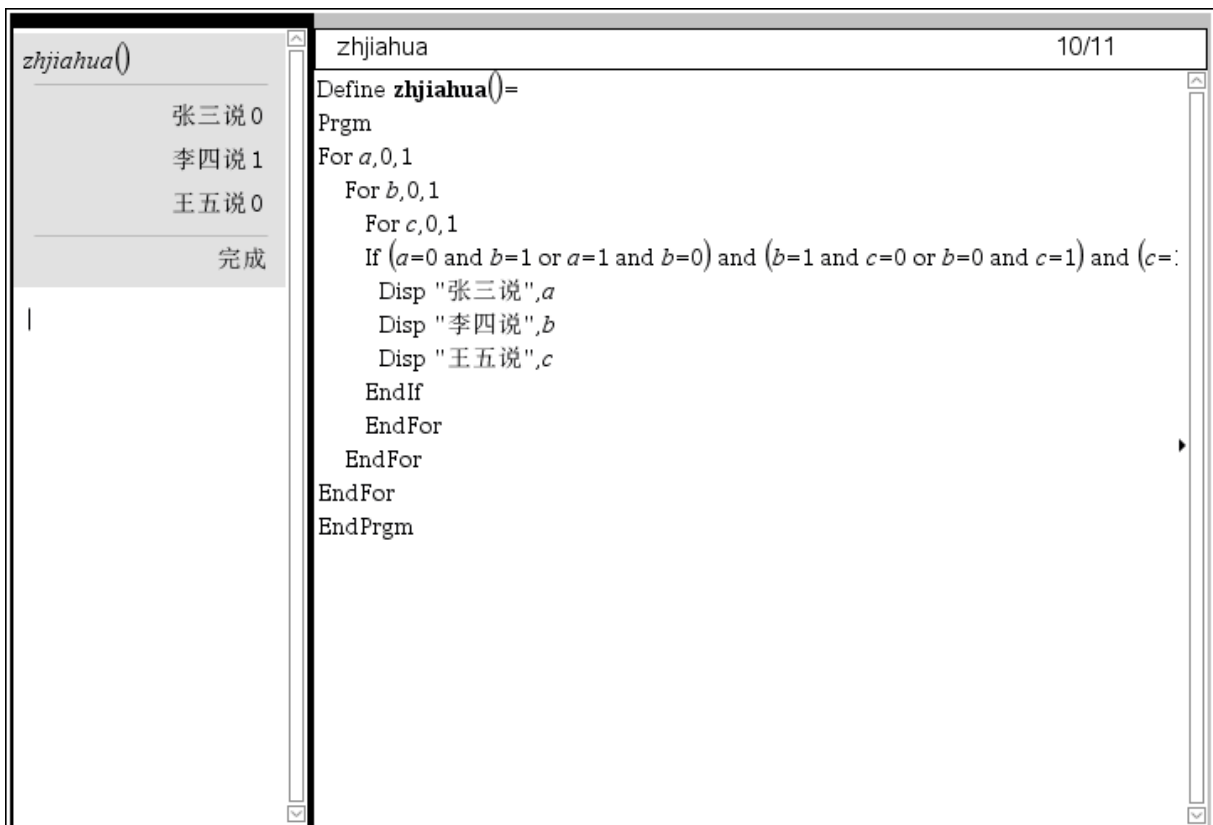
李四说的是真话: $b=1$ and $c=0$ 或 李四说的是假话: $b=0$ and $c=1$

*王五说张三和李四都在说谎

王五说的是真话: $c=1$ and $a+b=0$ 或 王五说的是假话: $c=0$ and $a+b \neq 0$

上述三个条件之间是“与”的关系。将表达式进行整理就可得到表达式:

穷举每个人说真话或说假话的各种可能情况, 代入上述表达式中进行推理运算, 使上述表达式均为“真”的情况就是正确的结果。



```
zhjiahua()
-----
张三说 0
李四说 1
王五说 0
-----
完成

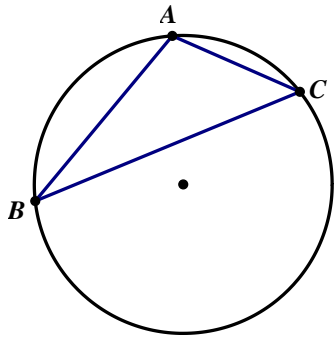
|

zhjiahua 10/11
Define zhjiahua()=
Prgm
For a,0,1
  For b,0,1
    For c,0,1
      If (a=0 and b=1 or a=1 and b=0) and (b=1 and c=0 or b=0 and c=1) and (c=1 and a+b=0 or c=0 and a+b=1)
        Disp "张三说",a
        Disp "李四说",b
        Disp "王五说",c
      EndIf
    EndFor
  EndFor
EndFor
EndPrgm
```

结果: 张三说假话 李四说真话 王五说假话

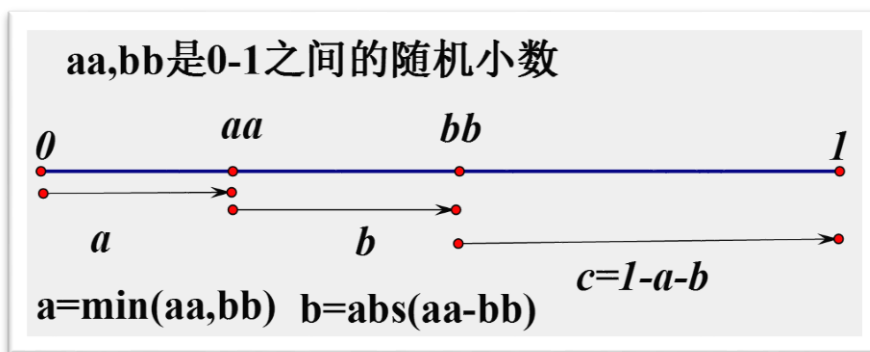
二、逻辑判断在概率中的应用

例 3 用随机模拟的方法来计算圆内接三角形是钝角三角形的概率



我们知道三角形是钝角三角形即三个角中有一个角大于 $\frac{\pi}{2}$ 即可。如图 $A > \frac{\pi}{2}$

问题分析与算法分析 设三个角分别为 A、B、C（弧度制），约掉 π



程序与注释

```
Request “实验次数 n=”, n
1 → i
0 → k
While i ≤ n
  Rand( ) → aa
  Rand( ) → bb
  Min(aa, bb) → a
  abs(aa - bb) → b
  1 - a - b → c
  If a > 0.5 or b > 0.5 or c > 0.5 then
    k + 1 → k          /*记录钝角三角形个数*/
  Endif
  i + 1 → i
Endwhile
Disp “钝角三角形个数 k=”, k
Disp “钝角三角形的概率=”, approx(k/n)  /*给出概率的近似值*/
```

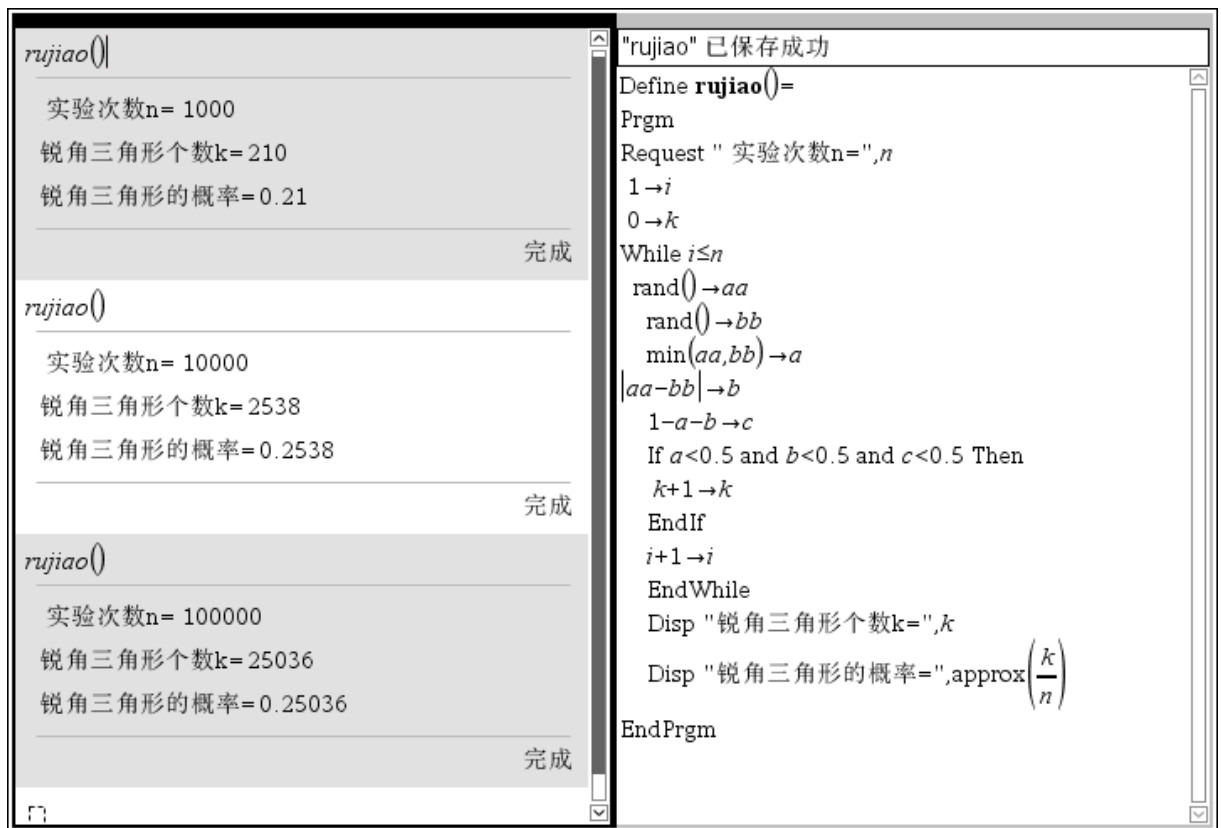
<pre>dunjiao() 实验次数n= 1000 钝角三角形个数k= 746 钝角三角形的概率=0.746 完成</pre>	<pre>dunjiao() 实验次数n= 10000 钝角三角形个数k= 7566 钝角三角形的概率=0.7566 完成</pre>	<pre>dunjiao() 实验次数n= 100000 钝角三角形个数k= 74974 钝角三角形的概率= 0.74974 完成</pre>	<pre>dunjiao 9/16 Define dunjiao()= Prgm Request " 实验次数n=",n 1→i 0→k While i≤n rand()→aa rand()→bb min(aa,bb)→a aa-bb →b 1-a-b→c If a>0.5 or b>0.5 or c>0.5 Then k+1→k EndIf i+1→i EndWhile Disp "钝角三角形个数k=",k Disp "钝角三角形的概率=",approx($\frac{k}{n}$) EndPrgm</pre>
--	---	---	---

问题：概率的准确值是多少？

变式练习

1. 用随机模拟的方法来计算圆内接三角形是**锐角三角形**的概率（修改上述程序）

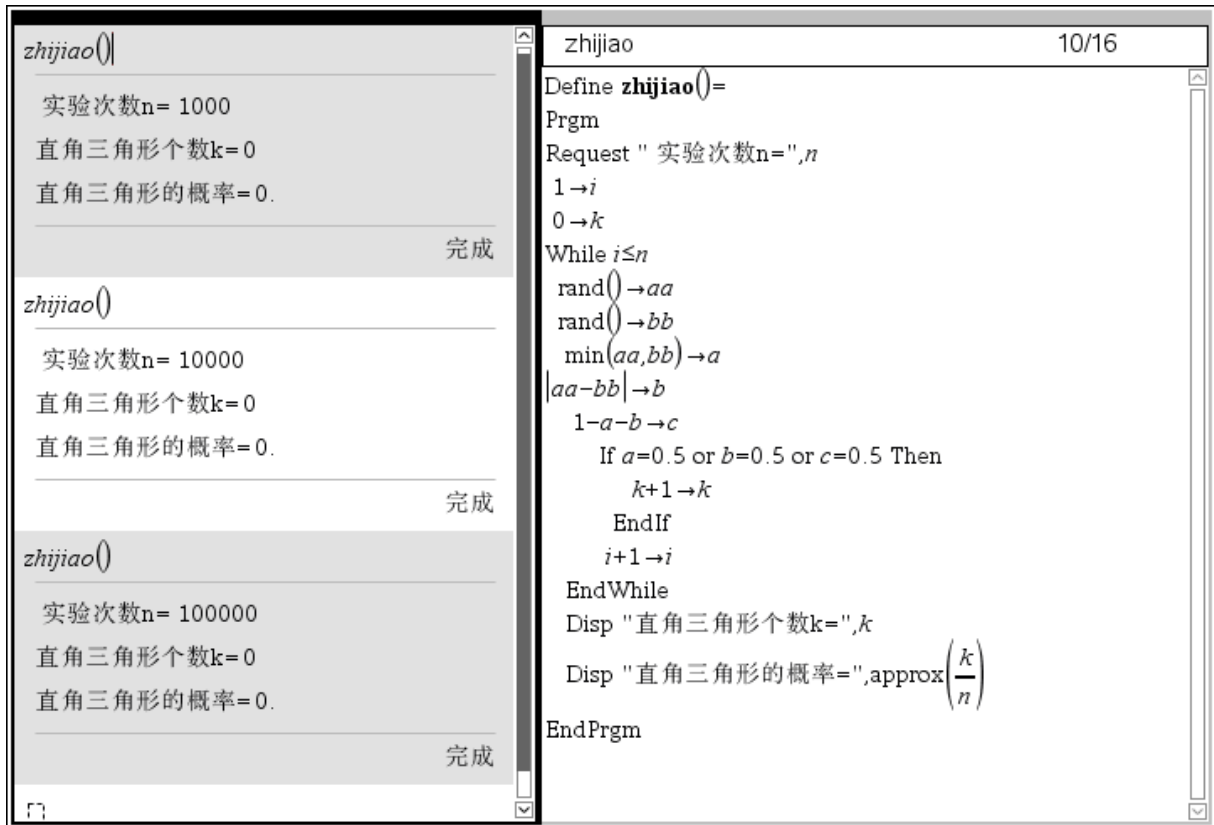
```
Request " 实验次数 n=", n
1→i
0→k
While i≤n
  Rand( )→aa
  Rand( )→bb
  Min(aa,bb)→a
  abs(aa-bb)→b
  1-a-b→c
  If a<0.5 and b<0.5 and c<0.5 then
    k+1→k
  Endif
  i+1→i
Endwhile
Disp "钝角三角形个数 k=", k
Disp "钝角三角形的概率=", approx(k/n)
```



问题：概率的准确值是多少？

2. 用随机模拟的方法来计算圆内接三角形是**直角三角形**的概率（修改上述程序）

```
Request "实验次数 n=", n
1→i
0→k
While i≤n
  Rand( )→aa
  Rand( )→bb
  Min(aa,bb)→a
  abs(aa-bb)→b
  1-a-b→c
  If a=0.5 or b=0.5 or c=0.5 then
    k+1→k
  Endif
  i+1→i
Endwhile
Disp "直角三角形个数 k=", k
Disp "直角三角形的概率=", approx(k/n)
```



问题：如何解释概率为 0？

3. 一根长度为 1 的细铁丝折成三段，能构成三角形的概率？（修改上述程序）

程序设计：

```
Request " 实验次数 n" , n
1->i
0->k
While i<=n
  Rand( )->aa
  Rand( )->bb
  Min(aa,bb)->a
  abs(aa-bb)->b
  1-a-b->c
  If a+b>c and a+c>b and b+c>a then
    k+1->k
  Endif
  i+1->i
Endwhile
Disp "能构成三角形个数 k=" , k
Disp "能构成三角形的概率=" , approx(k/n)
```

<pre>sanjx() 实验次数n= 1000 能构成三角形个数k= 228 能构成三角形的概率是= 0.228 完成</pre>	<pre>sanjx 7/16 Define sanjx()= Prgm Request "实验次数n=",n 1 → i 0 → k While i ≤ n rand() → aa rand() → bb min(aa,bb) → a aa-bb → b 1-a-b → c If a+b>c and a+c>b and b+c>a Then k+1 → k EndIf i+1 → i EndWhile Disp "能构成三角形个数k=",k Disp "能构成三角形的概率是=",approx($\frac{k}{n}$) EndPrgm</pre>
<pre>sanjx() 实验次数n= 10000 能构成三角形个数k= 2510 能构成三角形的概率是= 0.251 完成</pre>	
<pre>sanjx() 实验次数n= 100000 能构成三角形个数k= 24935 能构成三角形的概率是= 0.24935 完成</pre>	

问题：概率的准确值是多少？

通过四个例子来进一步理解“与、或、非”三个基本逻辑运算在算法中的应用。