简单的线性规划

北京市第十四中学　　魏晓莉

[教学目标]

1、知识目标：

（1）了解线性规划的意义及约束条件、目标函数、可行解、可行域、最优解等概念；

（2）了解线性规划问题的图解法。

2、能力目标：

（1）培养学生的观察能力和联想能力，渗透集合、化归、数形结合等数学思想；

（2）培养学生利用现代化信息技术手段进行探索、实验的能力。

3、情感目标：

结合教学内容培养学生学习数学的兴趣以及“用数学”的意识，激励学生勇于创新。

[教学重点]

线性规划的意义及线性规划问题的图解法。

[教学难点]

寻找线性规划问题的最优解。

[教学过程]

一、设置情境，引入新课

放映几段公益广告，引出以下问题：

某班同学计划利用星期日去市郊的养老院进行献爱心活动。学校为同学去养老院提供的往返车费总共是 37 元。这次活动由 A、B 两区的同学参与，每区至少去一名同学，并要求 B 区参与的同学比 A 区参与的同学至少多一名。已知 A 区每位同学的往返车费是 3 元，每人可为 5 位老人服务，B 区每位同学的往返车费是 5 元，每人可为 3 位老人服务。怎样合理安排 A、B 两区参与活动的同学人数，才能使最多的老人得到服务？得到服务的老人人数最多是多少？

提问：你能将上述问题抽象概括为一个数学问题吗？

分析：将已知数据列成下表：

项目＼地区	A 区	B 区	限额
学生人数（位）	x	y	
车费（元）	3x	5y	37
服务人数（位）	5x	3y	

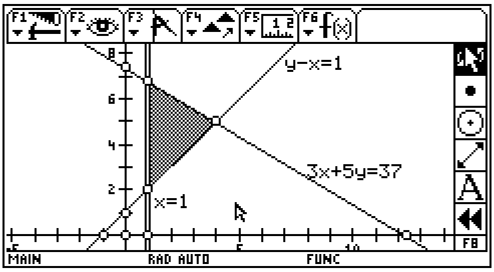
设 A 区、B 区参与活动的同学人数分别是 x，y 个，得到服务的老人总数为 m 个，则引例可以转化为以下数学问题：

已知变量 x,y 满足下列条件：$\begin{cases} x \geq 1 \\ y - x \geq 1 \\ 3x + 5y \leq 37 \end{cases}$ ①

求 $m = 5x + 3y$ 的最大值。

二、探索尝试，解决问题

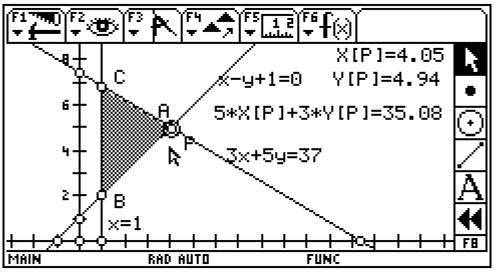
问题 1、不等式组①在平面直角坐标系中表示什么？

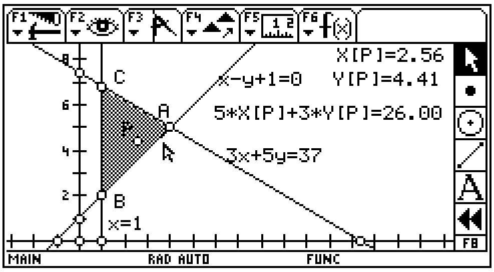


问题 2、变量 x,y 受不等式组①的制约，则点 P(x,y)应满足什么条件？点 P(x,y)应在阴影部分所表示的平面区域上。

问题 3、$m = 5x + 3y$ 的值是随变量 x,y 值的变化而变化的，请利用手中的机器探索一下，当点 P 在何处时 m 的值最大？

（学生活动）





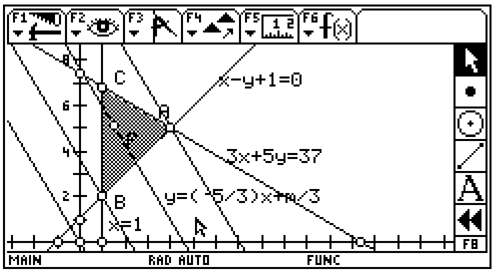
可以观察出当点P与阴影区域边界端点A重合时m的值最大。

问题 4、思考一下为什么在点 A 处 m 的值最大？

问题 5、将$m=5x+3y$放入直角坐标系中，它表示什么？m 的几何意义是什么？

问题 6、在明了条件和结论的几何意义之后，你能尝试在直角坐标系中解决这个问题吗？

（让学生自己利用 TI 图形计算器去思考解决问题，然后汇报解决方案）

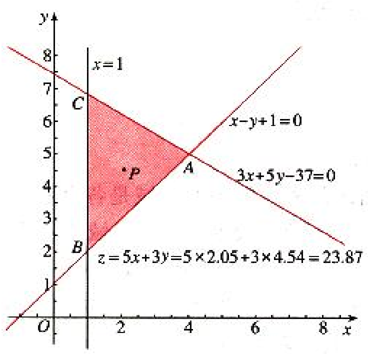


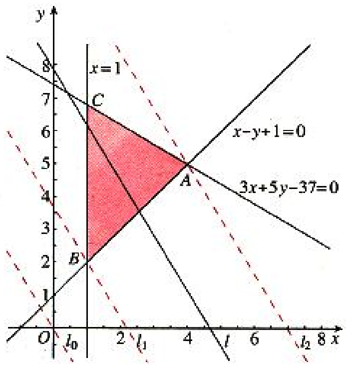
解：设 A 区、B 区参与活动的同学人数分别是 x，y 个，得到服务的老人总数为 m 个。依题意得：$\begin{cases} x\geq 1 \\ y-x\geq 1 \\ 3x+5y\leq 37 \end{cases}$ ①

$$m=5x+3y$$

作出不等式组①所表示的平面区域，以及直线 l：$5x+3y=0$，

如图：





将直线 l：$5x+3y=0$ 向右上方移动经过 A 点，此时直线纵截距最大，则 m 取最大值。

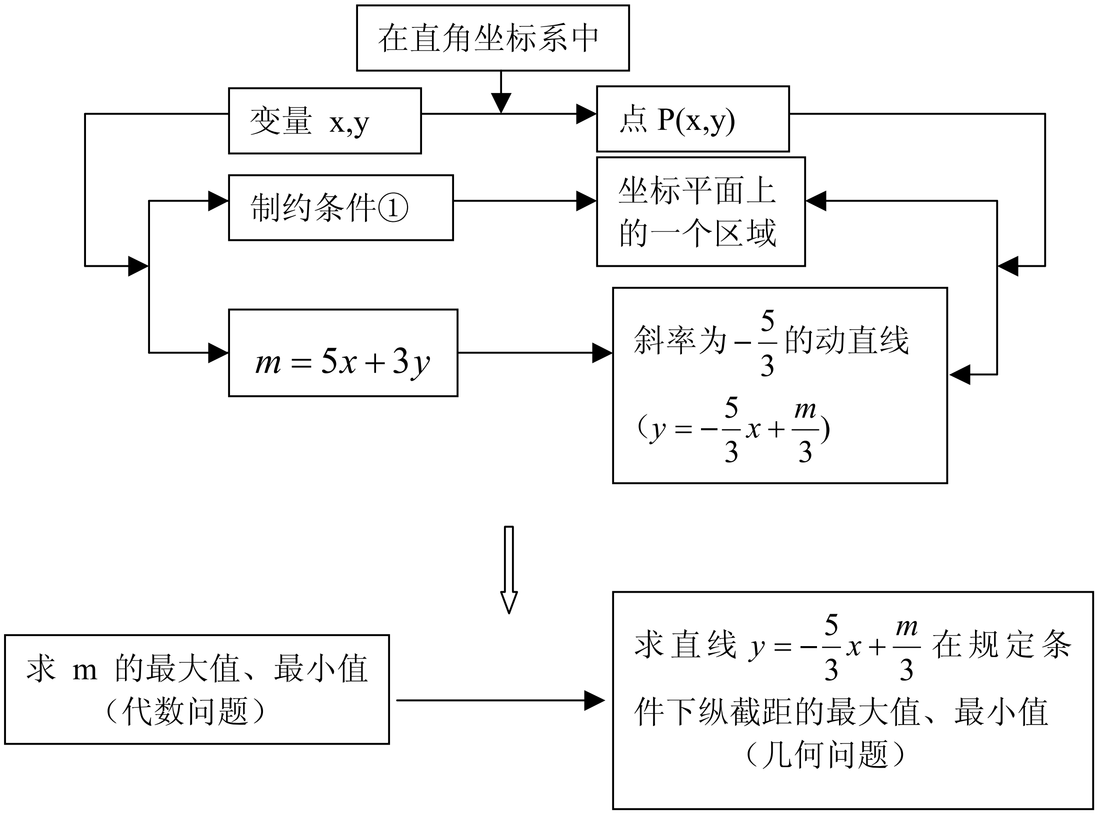
解方程组：$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x+5y=37 \end{cases}$ 得 A 点坐标为（4，5）

$\therefore m=5\times4+3\times5=35$.

答：A 区应派 4 位同学，B 区应派 5 位同学去养老院，最多可为 35 位老人服务。

问题 7、你能求 $m=5x+3y$ 的最小值吗？

小结：



三、形成概念，归纳方法

1、形成概念

在讲完引例的基础上，采用对比的方法介绍与线性规划有关的概念：约束条件（线性约束条件）、目标函数（线性目标函数）、线性规划、可

行解、可行域、最优解。

2、归纳方法

对照引例的解法，介绍线性规划问题的图解法，师生共同归纳出线性规划问题图解法的解题步骤：

（1）画 ——— 画出线性约束条件所表示的可行域；

（2）移 ——— 在目标函数所表示的一组平行线中，利用平移的方法找出与可行域有公共点且纵（横）截距最大最小的直线；

（3）求 ——— 通过解方程组求出最优解；

（4）答 ——— 作出答案。

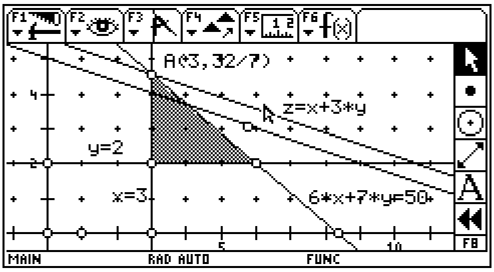
四、变式训练，形成技能

练习 1、已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} 6x+7y \le 50 \\ x \ge 3 \\ y \ge 2 \end{cases}$

（1）求目标函数 Z=x+3y 的最大值；

（2）x, y 均为整数，求目标函数 Z=x+3y 的最大值。

结论一：线性目标函数的最大值、最小值一般在可行域的顶点处取得。



练习 2、设 Z=2x-y，式中变量 x, y 满足下列条件 $\begin{cases} x-4y \le -3 \\ 3x+5y \le 25 \\ x \ge 1 \end{cases}$，

求出最优解，并求出 Z 的最大、最小值。

教学中，要引导学生分清目标函数 Z 取得最大值时，目标函数所表示的直线的纵截距最大；反之，Z 有最小值时，目标函数所表示的直线的纵截距最小。

结论二：求线性目标函数的最优解，要注意分析目标函数所表示的几何意义。

五、归纳小结，延伸提高

1、小结：

（1）通过今天的学习，我们初步了解了线性规划的意义及有关概念，学习了线性规划问题的图解法。

（2）数形结合的思想、转化的思想、集合的思想。

$$
\begin{tikzcd}
\text{代数问题} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \text{几何问题} \arrow[d] \\
\text{代数问题的解} & \text{几何问题的解} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

（3）数学建模的思想。

2、思考题：

（1）若将练习 1 中的目标函数 Z=x+3y 变成非线性目标函数 $z = x^2 + y^2$，

请同学们思考一下应怎样求解？

（2）以下解法是否正确，请说明道理：

已知：$f(x)=px^2-q$，且 $-4 \leqslant f(1) \leqslant -1$，$-1 \leqslant f(2) \leqslant 5$

求： f(3) 取 值 范 围

解：∵ $f(1)=p-q$ ∴ $-4 \leqslant p-q \leqslant -1$ ……………… ①

∵ $f(2)=4p-q$ ∴ $-1 \leqslant 4p-q \leqslant 5$………… ②

∴ 由①，②可得：$0 \leqslant p \leqslant 3$，$1 \leqslant q \leqslant 7$

又∵ $f(3)=9p-q$ 所以：$-7 \le f(3)=9p-q \le 28$

六、布置作业 （略）