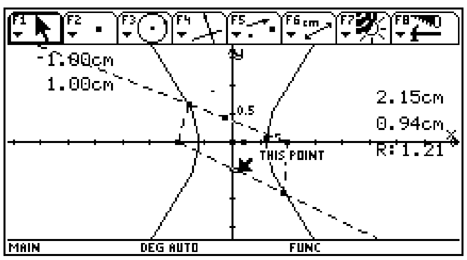
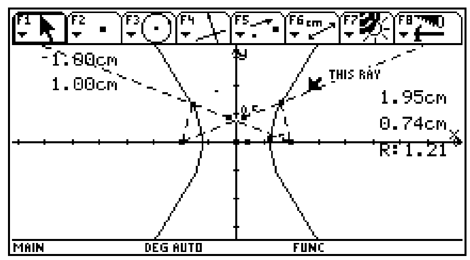
双　曲　线　性　质

上海　华东师大一附中　区志华

〖教 学 目 的〗正确理解双曲线的概念，掌握双曲线的性质。

〖重点与难点〗 重点：双曲线的性质。





难点：双曲线的标准方程的导出，理解渐近线的几何意义。

〖教学过程〗

一. 双曲线的定义：

平面上到两个定点F_1、F_2距离的差的绝对值等于常数2a（ 0＜2a＜2c，｜F_1F_2｜＝2c)的点的轨迹叫做双曲线。其中F_1、F_2叫做双曲线的焦点，焦点的距离叫做焦距(即 2c)（当a＝c时，轨迹是直线F_1F_2中不包括线段F_1F_2的部分； 当a＞c时，无轨迹）

二. 双曲线的标准方程：

以直线F_1F_2为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系.

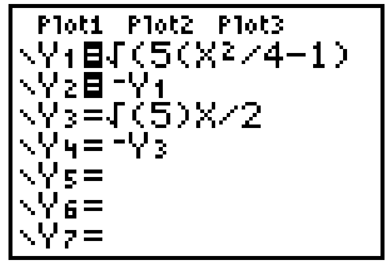
$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(0,\ c)$．设M(x，y)是双曲线上的任意一点，则｜MF_1｜-｜MF_2｜＝±2a，

整理得 $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$，

由 c＞a＞0，$c^2-a^2>0$，令 $b^2=c^2-a^2$ (b＞0)，　　即 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

反过来，可以证明以该方程的解为坐标的点，都在这个双曲线上 (即以上各步骤都可逆)略.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 形式的双曲线方程叫做双曲线的标准方程.



它表示的双曲线的两个焦点在x轴上，且坐标是(-c，0)，(0，c)，其中 $c^2=a^2+b^2$.

如果双曲线的两个焦点在y轴上，焦点是(0，-c)，(0，c)，双曲线上的点到两个焦点的距离的和等于2a（ c＞a＞0 ），则双曲线方程是 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.

这个方程也叫做双曲线的标准方程，其中$c^2=a^2+b^2$.

[例 1] 已知双曲线的焦距是6，双曲线上的点到两个焦点距离的差的绝对值等于4,求双曲线的标准方程

[解]：因 2c＝6，2a＝4，即 c＝3，a＝2，

则 $b^2=c^2-a^2=5$.　　（ 演示图象 ）

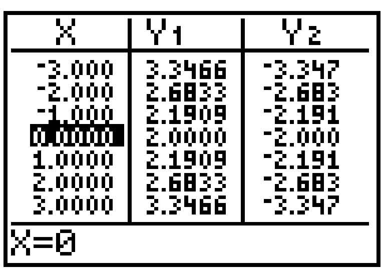
所以，焦点在x轴上双曲线标准方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

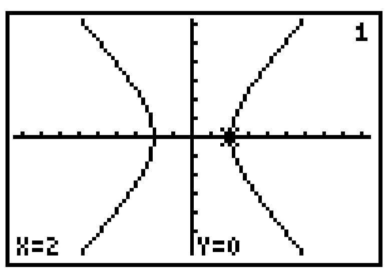
焦点在y轴上双曲线标准方程是 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$.

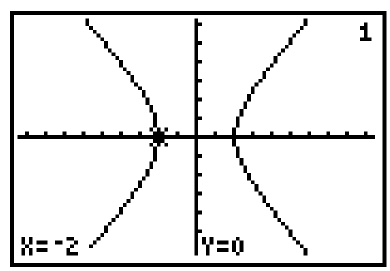
三．双曲线的性质

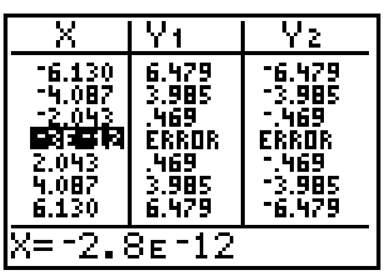
研究标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的性质：(结合例 1 图象)

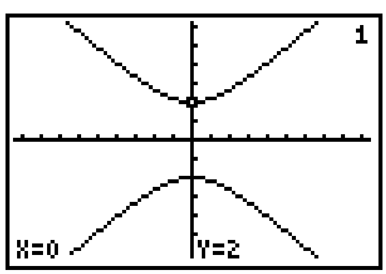
1．对称性：双曲线是关于x、y轴对称的；双曲线是关于原点对称的；坐标轴是双曲线的对称轴；原点是双曲线的对称中心（也叫做双曲线的中心）.

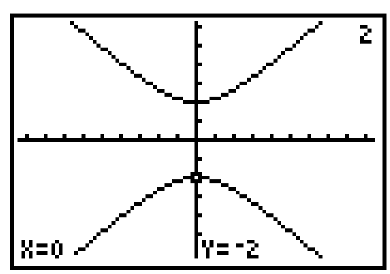












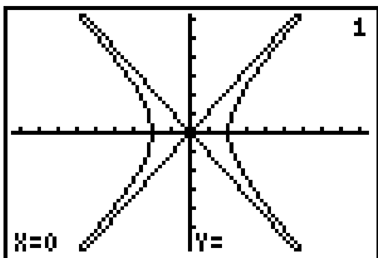
2. 顶点：双曲线与它的对称轴的交点叫做双曲线的顶点.

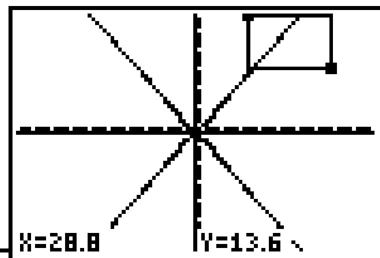
实轴长为2a，虚轴长为2b，即a、b分别叫做双曲线的实半轴的长和虚半轴的长.

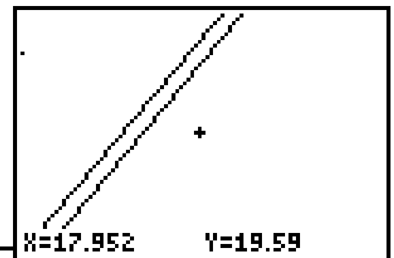
3. 直线方程：$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 叫做双曲线的渐近线.

研究这两条直线与双曲线的位置关系： 双曲线是无限接近、但不会达到渐近线的.

（演示例 1 的双曲线与其渐近线的图象）



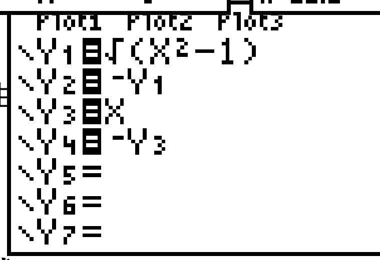


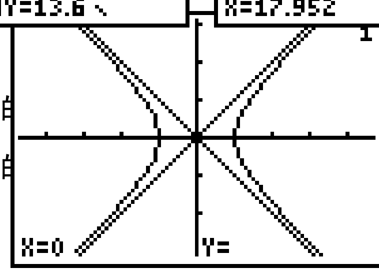


4. 范围：

双曲线是由 … —a 自 … 展；

… =a 自 … 展.





四. 等轴双曲线：

我们把实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线.

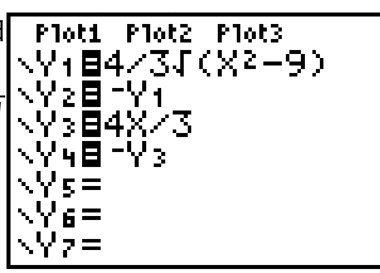
其渐近线是 y＝±x，它们互相垂直，且是两条对称轴(坐标轴)所成的角的平分线.

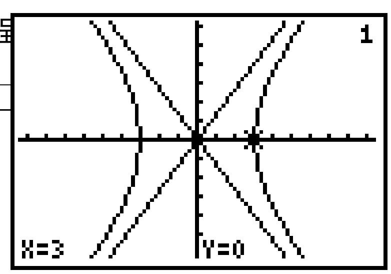
（演示图象：双曲线 x^2－ y^2＝ 1 的渐近线方程是 y＝±x）

五. 双曲线作图：

[例 2] 求双曲 … 方程

[解]：渐近线方 … $\sqrt{x^2 -}$





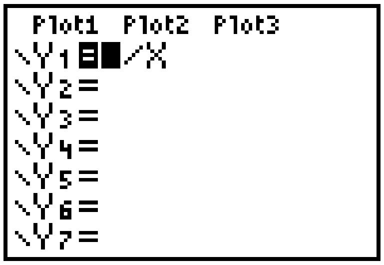
六. 初中所学的反比例函数是双曲线方程的特殊情况.

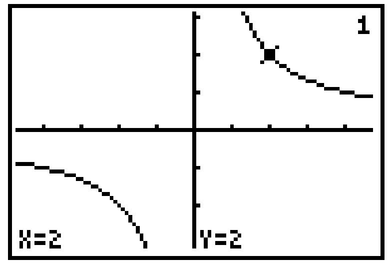
［例３］ 已知等轴双曲线的两个焦点F_1、F_2在直线 $y=x$ 上, 线段F_1F_2的中点是原点,

且$|F_1F_2|=8$. 求这个等轴双曲线的方程与两条渐近线方程

[解]: 中心是原点, 焦距为8, 焦点在直线 $y = x$ 的等轴双曲线方程: $xy = 4$.

渐近线方程为 $x=0$, $y=0$ (即为坐标轴).



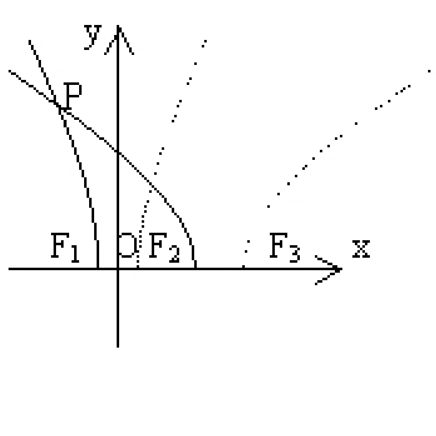


七. 航行定位问题的应用.

双曲线在光学、声学等方面有着很多的应用. 下例是利用双曲线的时差定位问题:

[例４] 在沿海地区设置了F_1、F_2、F_3三个远程无线电讯号发射台, 它们自北向南呈一直线, 依次为F_1、F_2、F_3, 同时发出无线电讯号, 且F_1与F_2、F_2与F_3都相距800千米。 无线电波传播速度是$3×10^5$千米／秒。 海上一艘船在沿海地区的东部P处时, 收到F_3的讯号比F_2讯号迟了1333微秒(1秒＝10^6微秒)时, 在P处还收到F_2比F_1的讯号迟667微秒。求P处相对F_1讯号台的方位. (精确到1千米)

[解]: 如图, 以F_1、F_2的中点为原点，正南方向为x轴的正半轴，正东方向为y轴的正半轴，建立平面直角坐标系。由$|PF_2|-|PF_1|=667×10^{-6}×3×10^5 \approx 2$ (百千米),



得 $a_1=1$, $c_1=4$, $b_1^2=c_1^2-a_1^2=15$,

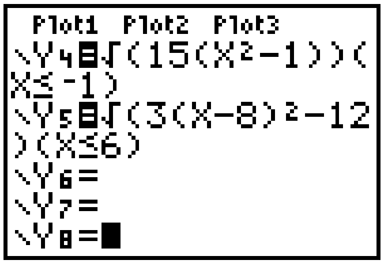
得 方程 (1): $x^2-\frac{y^2}{15}=1$ ($x\leqq-1$, $y>0$),

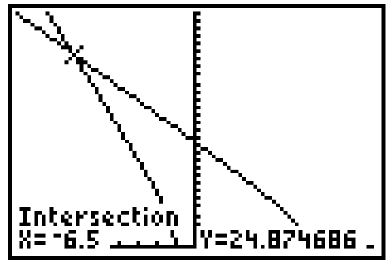
即 $15x^2 - y^2 = 15$。

由$|PF_3|-|PF_2|=1333×10^{-6}×3×10^5 \approx 4$ (百千米), 得 $a_2=2$, $c_2=4$, $b_2^2=c_2^2-a_2^2=12$,

得 方程 (2): $\frac{(x-8)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ ($x\leqq6$, $y>0$),

即 $3(x-8)^2 - y^2 = 12$。由方程(1)、(2)消去y, 得 $x^2+4x-16.25=0$, 解得 $x=-6.5$ 或 2.5 (舍)。$y=\sqrt{15x^2-15} \approx 24.87$(百千米)。所以, P位于$F_1$讯号台以北 250千米, 以东约2487千米处。





〖**小结**〗 通过 TI 计算器的应用，使得双曲线的概念及其性质的学习，更加具体化、形象化，有利于双曲线概念及性质的理解，加深了对渐近线与双曲线的位置的理解。用空间。

〖**教案说明**〗

数 形 结 合 的 教 学 探 索

——— “双 曲 线”教 案 的 说 明

教材第十二章“圆锥曲线”的教学，集中展示了“由已知条件求曲线的方程，再从所得的方程来研究曲线的几何性质”的基础内容，要求学生熟悉、理解、初步掌握解析法的基本思想，“双曲线”是主要载体之一。因此，在“双曲线”的教学过程中，运用“形”、“数”结合，营造一个形象化的学习过程是十分必要的。

一、由“形”至“数”的直观教学。

1．平面上到两个定点F_1、F_2距离的差的绝对值等于常数 2a（ $0<2a<2c$, $|F_1F_2|=2c$ ）的点的轨迹是什么？

以前的演示方法是：用绘制双曲线图象的教具或者直接在黑板上绘图说明。这样，往往缺乏直观性和可信度。

利用 TI-92+ 计算器的几何功能（Geometry），可以形象地把满足条件的点的轨迹“双曲线”绘制出来，并且通过动画，可以清楚地观察到“双曲线”是点的运动轨迹所形成的图形。然后，用计算器的主屏幕（Home），显示“双曲线标准方程”的导出过程。

2．双曲线的几何性质是什么？

现行教材是用解析的方式，引导出双曲线的几何性质。如：

⑴ 把x换成－x，把y换成－y，使得方程不变，从而说明其对称性；

⑵ 令x＝0，y＝0，考察方程解的情况，定义了双曲线的顶点；

⑶ 由标准方程变形为函数形式，结合函数的定义域和单调性，去理解双曲线的范围。

应用 TI 计算器的图象功能（Graph），可以从双曲线的图象中，直接观察其图形特征。通过例1 的双曲线的图象绘制，运用（Trace）功能，能具体观察到双曲线的对称性、顶点及其范围等性质，从而推广为一般的双曲线图形性质。

3．渐近线是双曲线特有的几何性质。

渐近线是经过双曲线中心的两条直线，它把双曲线分成左、右或上、下两支。

运用 TI 计算器，在例1 双曲线图象的基础上，加入其渐近线的图象，可以直接观察到双曲线与其渐近线之间的接近程度，再重复运用（ZoomIn）功能，使双曲线与其渐近线之间呈现出明显间距，从而说明双曲线是无限接近、但永远不能达到渐近线的，无疑形象地体现了渐近线的几何意义。

4. 双曲线的作图。

TI 计算器的强大、便捷的图形功能与现行教材中的“描点作图法”相比较，很显然，当要求作出双曲线的图象时，应用 TI 计算器，就能及时地绘制出其图象，如例2 。

二、由“学”至“用”的应用教学。

1. 初中所学的反比例函数的图象是等轴双曲线。

通过例3 的运算，说明初中的反比例函数的图象是等轴双曲线，且以坐标轴为其渐近线，既是初中知识的深化和提高，又与初中学习相一致。反比例函数的图象是双曲线，它的两个分支都无限接近于坐标轴，但不会与坐标轴相交。

2. 双曲线在实际生活中的应用。

双曲线在光学、声学等方面有着很多的应用，教材例举了一个以双曲线为基础的远程无线电导航问题，说明双曲线的实用意义。本教案依此，设计了例4 的双曲线运用与时差定位的问题。

在例4 的解决过程中，以运算为基础，通过解方程，计算出船的位置，也可以运用TI 计算器的图象显示，用（Intersection）功能，求出船的坐标位置，也可以确定船的大致方位。

通过上述的教学实践，可以明显地反映出 TI 计算器的应用价值，同时，也可以把原来用比较抽象的方式学习双曲线，改变为用图形形象地学习双曲线，使学生能直观地了解双曲线的知识，并且学生也可以自己实践，用 TI-83+ 计算器演示双曲线的图象，在“数形结合”中，学习双曲线等圆锥曲线知识。

总之，TI 技术的应用，有利于知识的理解，有利于现行教材的改革，有利于学生的自主学习。