加班是否一定能增收

上海市进才中学　　卢　明

一．实际问题

当一个工厂完不成生产任务时，一般想到的解决办法总是“加班”，大家都觉得加班能增加产量，也就等于增加收入。但是，用精确的数学计算，你会得到意料之外的结论。请看下面的例子：

一位生产玻璃杯的个体经营者有两副生产模具，一副生产果汁杯，另一副生产鸡尾酒杯，具体工作情况如下表：

品　　种	工　　效	储　藏　量	定点量	收　　益
果　汁　杯	6 小时/百件	10 m^3/百件	600 件	600 元/百件
鸡尾酒杯	5 小时/百件	20 m^3/百件	无	400 元/百件

若每周工作 50 小时，且拥有储藏量为 140 m^3 的仓库，问：该个体经营者应如何安排计划方可使每周收益最大？

二．相关知识

这是一个求“最佳效益”的问题，数学中“线性规划”的知识可以帮助我们解决这个问题。

在线性规划问题中，有一个求“最佳解”的函数和一些一次不等式；这个函数称为目标函数，它可以用来描述某种产品的利润或价值；这些一次不等式称为约束条件，可以用来表示生产中各生产要素的取值范围。

我们可以把不等式组的解表示为一个多边形区域，并称这个区域为“可行解”区域，它包含了目标函数允许取的所有的点。如果目标函数在可行解区域内某点处取得最佳解，这个解一定是多边形的顶点，这个点就是此线性规划问题的解。

三．解决过程

1．**确定目标函数**：设该经营者每周生产果汁杯 x（百件），鸡尾酒杯 y（百件），则此问题的目标函数是________________。$f = 600x + 400y$

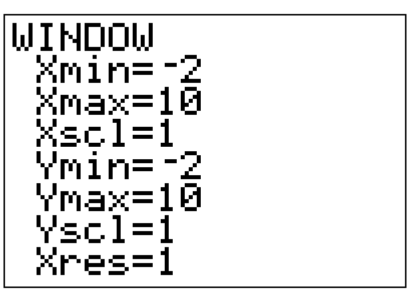
2．**确定可行解区域**：该经营者生产果汁杯和鸡尾酒杯的总的工作时间不超过 50 小时；两种产品的储藏量不超过 140m^3；果汁杯的生产量不超过 600 件。根据这些信息，此问题的约束条件是________________。$\begin{cases} 6x + 5y \le 50 \\ 10x + 20y \le 140 \\ x \le 6 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

3．**等价变形**：从上述约束条件中解出 y，得________________。

$$\begin{cases} y \le -\dfrac{6}{5}x + 10 \\ y \le -\dfrac{1}{2}x + 7 \\ x \le 6 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

4．(1) **重新设置计算器**：按下 On 打开 TI-83 计算器，按下 2nd 、Mem，选择 7：Reset，2：Defaults，再按下 Enter，重新设置计算器。

(2) **输入约束条件**：按下 Y= 显示 Y= 编辑器，依次输入 $y_1 = -\dfrac{6}{5}x + 10$ 和 $y_2 = -\dfrac{1}{2}x + 7$。



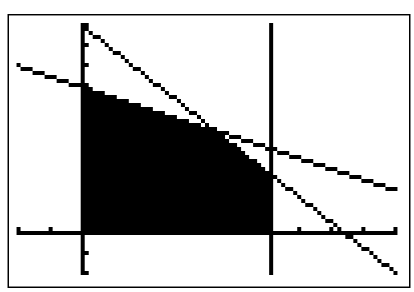
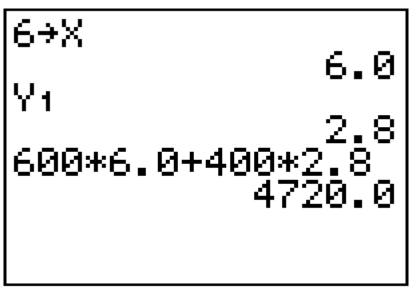


图 1　　　　　　图 2

(3) **显示可行解区域**：改变窗口 Window 设置（见图 1），按下 $\boxed{\text{2nd}}$、$\boxed{\text{Quit}}$ 返回主屏幕。然后按下 $\boxed{\text{2nd}}$、$\boxed{\text{Draw}}$，选择 4：Vertical，输入 6，再按下 $\boxed{\text{Enter}}$。则计算器显示可行解区域（见图 2）。

(4) **求出问题的解**：返回主屏幕，按下 6、→、X，然后按下 $\boxed{\text{Vars}}$，选择 Y-Vars、1：Function，输入 1，再按下 $\boxed{\text{Enter}}$，得 $y_1 = 2.8$，将顶点 $(6\,,2.8)$ 代入目标函数，得目标函数的值为 4720（见图 3）。在图形窗口中，按下 $\boxed{\text{2nd}}$、$\boxed{\text{Calc}}$，选择 5：Intersect，再按下 $\boxed{\text{Enter}}$、$\boxed{\text{Enter}}$，输入 4，$\boxed{\text{Enter}}$，窗口显示 $y_1 = -\dfrac{6}{5}x + 10$ 和 $y_2 = -\dfrac{1}{2}x + 7$ 的交点坐标为 $(4.3\,,4.9)$（见图 4）。将顶点 $(4.3\,,4.9)$ 代入目标函数，得目标函数的值为 4540。



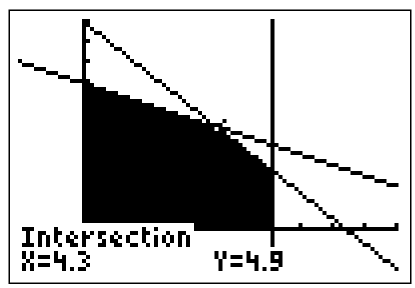


图 3　　　　　　图 4

(5) **得出结论**：每周应生产 600 件果汁杯，280 件鸡尾酒杯，经营者得到最大利润为 4720 元。

四．拓展研究

(1) 每周生产时间增加 1 小时，其它条件不变，经营者的收益将会怎样变化？

(2) 每周生产时间再增加 1 小时，其它条件不变，经营者的收益将会怎样变化？你认为这个收益可以称为什么？

(3) 是否增加工时就一定能使经营者的收益增多呢？

(4) 你能从理论上对问题(3)作出分析吗？

(5) 若你是经营者，你还会从哪个方面提高经济效益？

五．参考答案

(1) 每周生产时间增加1小时，其它条件不变，只需将约束条件$6x+5y\le 50$改为$6x+5y\le 51$，用同样的方法得可行解区域的顶点坐标为$(6,3)$，将$(6,3)$代入目标函数，知经营者的收益为 4800 元，增加80元。

(2) 每周生产时间再增加1小时，其它条件不变，经营者的收益仍将增加80元这个收益可以称为工作时间的“影子价格”。

(3) 图 5 是工时增加了 2 小时、4 小时、6 小时、8 小时和 10 小时之后可行解区域的变化情况。可知工时增加超过6小时，经营者的收益就不会增加。

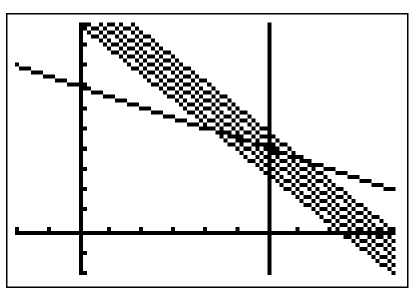


图 5

⑷ 设生产工时增加k个小时，由方程组$\begin{cases}6x+5y=50+k\\ x=6\end{cases}$得$\begin{cases}x=6\\ y=\dfrac{14+k}{5}\end{cases}$，

$f=3600+80(14+k)$，即经营者的收入增加了$80k$元。但考虑直线方程$6x+5y=50+k$，即$y=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{50+k}{5}$，随着$k$的增加，该直线在$y$轴上的截距将增加$\dfrac{k}{5}$，原约束条件将向右上方平移。但这个平移不能超过直线$10x+20y=140$和$x=6$的焦点，否则增加工时将不会带来效益（因为仓库里放不下了），即$k\le 6$。

⑸ 下列方案可供参考：

1. 增加储藏空间：储藏量增加1㎥，而其它条件不变，是否有类似“影子价格”？

2. 增加产量：增加效益较好的果汁杯的产量，而其它条件不变，经济效益会有什么变化？

3. 综合考虑各个生产要素：以上方法只是考虑一个生产要素的变化对经济效益的影响。综合考虑工时、储藏空间和产量等多个生产要素，可以进行多目标的规划设计。(有兴趣研究者可进一步参考《线性规划》的有关目标规划的理论和方法)