在“做数学”的快乐中，品数学探究的“味道”

——TI-Nspire 技术支持下《不同函数模型的增长差异比较》

广东省深圳市第二实验学校 彭青

本节课是笔者在第六届全国高中青年数学教师优秀课观摩与展示活动中代表广东省参加比赛的展示课的课堂实录，该课充分展示了 **TI-Nspire** 技术在课堂上的重要技术，受到专家、评委、在场观摩教师的一致好评。

本节课的教学过程以问题串的形式展开，让学生从课本已学习过的具体问题出发，发现要解决问题必须清楚已经学习过的不同函数模型的增长差异，由此进入不同函数模型增长差异的比较．教学时，为了解决短时间内要画大量函数图象进行比较，并让学生积极主动地学习，体会数学结论的观察、发现、归纳和概括全过程，将教学环境设计成在 TI-Nspire CX CAS 无线导航系统下，让学生自己通过 TI-Nspire CAS 进行探究并自主得出结论，并以此增加学生研究数学的经历.充分体现了教育技术在课堂上扮演的重要角色

教学过程

一、检验古老神话，品味探究情趣

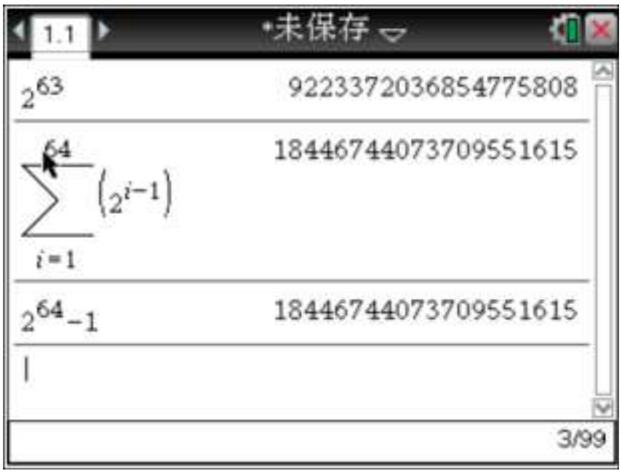
传说印度国王舍尔罕第一次玩国际象棋就被深深吸引了。为此，他要对发明人达依尔进行奖赏，他对达依尔说：“你可以得到你想要的任何东西”。达依尔对国王说：“我不要金银财宝，只要陛下按如下方式赏给我一些小麦。取一个棋子在棋盘上依次移动，当棋子在第 1 格时，陛下给我 1 粒小麦；当棋子在第 2 格时，陛下给我 2 粒小麦；当棋子在第 3 格时，陛下给我 4 粒小麦。依此类推，第 1 格以后，陛下每一格给我的麦粒都是前一格的两倍，直至棋子移到第 64 格为止。”国王觉得这样的奖赏太小了，当即答应了达依尔的要求.

教师：国王一共需要给达依尔多少粒小麦？大家利用图形计算器提交答案给我

学生：选择答案并提交给老师

教师：你们是怎么选择出 B 答案的呢？

学生：就是 $2^{64}-1$，我演示给您看：



教师：有人曾经做过研究，把 $2^{64}-1=18446744073709551615$ 粒小麦用呈长方体的仓库来储藏，如果长方体的底面是长 8m，宽 5m 的长方形，那么长方体的高度是地球到月球的距离的两倍。同学们想想，国王能给达依尔这么多小麦吗？

学生：不能，国王做不到呀（学生此时恍然大悟，兴趣大增）

教师：$y=2^x$，自变量从 63 增加到 64，函数值从 18 位变成 19 位，增长量非常巨大，

我们想把这些问题理解清楚，就要弄清楚 $y=2^x$ 这个函数的增长快慢

二、历经操作过程，感受探究乐趣

（一）研究指数函数的增长

教师：设 $f(x)=2^x$，计算 $f(20)-f(10)$，$f(60)-f(50)$，$f(160)-f(150)$ 你能利用计算结果说明什么问题呢？

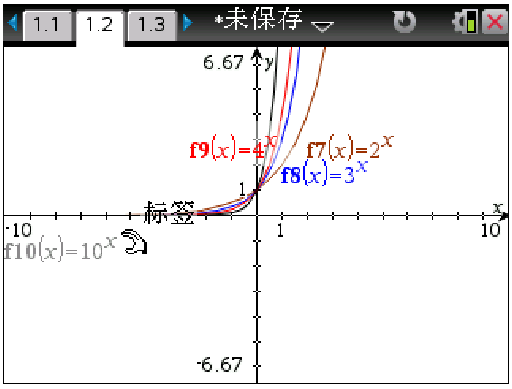
学生利用图形计算器计算，教师利用无线局域系统展示学生的结果：

学生：随着自变量的增大，$f(x)=2^x$ 的函数值增加得越来越快，增加的速度给人以“爆炸”的印象.

教师：你们自己取定 a（$a>1$）的值，用同样的方法研究 $f(x)=a^x$ 的情况，看是否可以得出相同的结论.

学生：利用图形计算器画出 $f(x)=3^x$，$f(x)=4^x$，$f(x)=5^x$，$f(x)=10^x$ 的图象，

教师：调出一个同学画的图象，并请他说明他发现并总结出的结论



（再配一个 y 的正方向范围更大的图）

学生：从上面图上可以看到：$a\,(a>1)$ 越大，指数函数 $y=a^x$ 增长得越快.

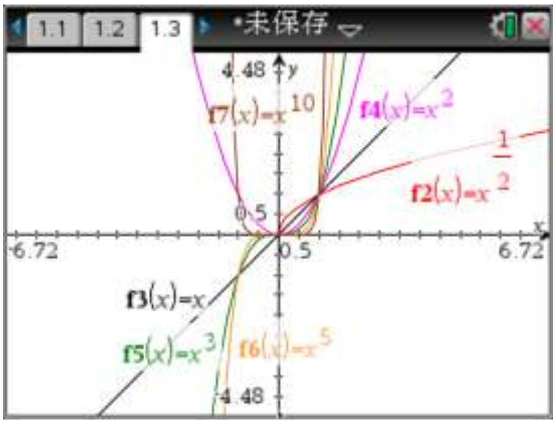
（二）研究幂函数的增长

教师：设 $g(x)=x^n(x>0,n>0)$，你能说明 n 的大小是怎样影响幂函数的增长吗？请大家用图形计算器画出下列幂函数的图象进行比较：

（1） $y=x^{\frac{1}{2}}$；　　（2） $y=x$；　　（3） $y=x^2$；

（4） $y=x^3$；　　（5） $y=x^5$；　　（6） $y=x^{10}$

学生：



教师：那么你们发现了什么规律呢？

学生：幂函数 $y=x^n(n>0)$，n 越大，函数在 $(0,+\infty)$ 增长得越快.

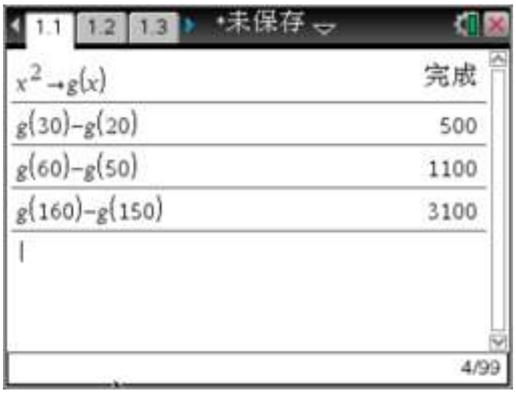
教师：能否将结论细化呢？分成 n>1 和 0<n<1 两种情况呢？

学生：n>1 时，$y=x^n$ 随着 x 的增大函数增长得越来越快，0<n<1 时，$y=x^n$ 随着 x 的增大函数增长越来越慢.

教师：设 $g(x)=x^2$，让学生计算 $g(20)-g(10)$，$g(60)-g(50)$，$g(160)-g(150)$，

你能发现幂函数和指数函数比较，哪个函数增长的速度更快呢？

学生：

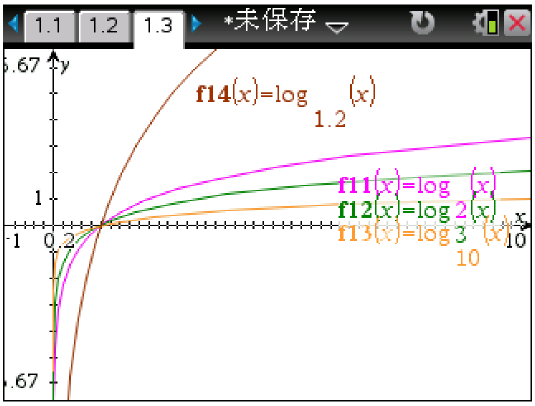


学生：从计算结果来看很明显幂函数的增长速度比指数函数增长的速度要慢

（三）研究对数函数的增长

教师：设 $h(x)=\log_b x(b>1)$，你能说明 b 的大小是怎样影响对数函数的增长吗？请大家用图形计算器画出下列对数函数的图象进行比较：

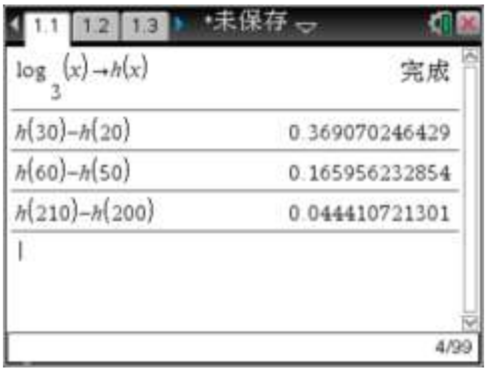
（1） $y=\log_{1.2}x$；（2） $y=\log_2 x$；（3） $y=\log_3 x$；（4） $y=\log_{10} x$。



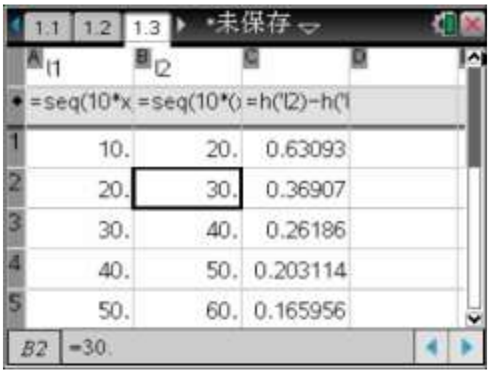
学生：对数函数 $h(x)=\log_b x(b>1)$，b 越大，函数在 $(0,+\infty)$ 增长得越慢。

教师：设 $h(x)=\log_3 x$， 计算 $h(20)-h(10)$， $h(60)-h(50)$， $h(210)-h(200)$，对数函数的增长速度与幂函数比较起来有什么差别？

学生：



$\log_3(x) \to h(x)$	完成
$h(30)-h(20)$	0.369070246429
$h(60)-h(50)$	0.165956232854
$h(210)-h(200)$	0.044410721301



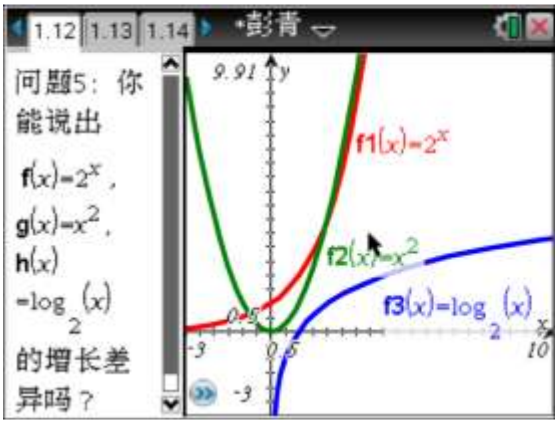
	A l1	B l2	C	D
◆	=seq(10*x	=seq(10*(	=h('l2)-h('l	
1	10.	20.	0.63093	
2	20.	30.	0.36907	
3	30.	40.	0.26186	
4	40.	50.	0.203114	
5	50.	60.	0.165956	

增长速度远远慢于幂函数的增长速度

（四）综合探究，概括结论

教师：你能说出函数 $y=2^x$ 、 $y=x^2$ 、 $y=\log_2 x$ 之间的增长差异吗？

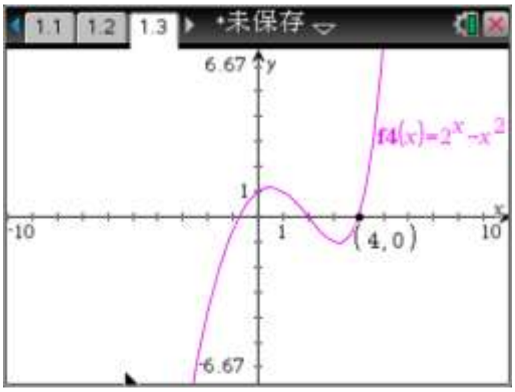
1.教师画出下图引导学生观察：



2.教师作出下表引导学生观察：

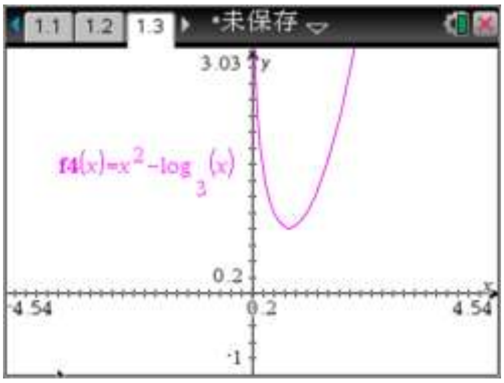
	A l1	B l2	C	D	E
◆	=seq(	='l1+1	=f('l2)-f('l1	=g('l2)-g('l	=h('l2)-h('l
1	10.	20.	1.04755E...	300.	1.
2	20.	30.	1.07269E...	500.	0.584963
3	30.	40.	1.09844E...	700.	0.415037
4	40.	50.	1.1248E1...	900.	0.321928
5	50.	60.	1.1518E1...	1100.	0.263034

3．教师作出函数 $s(x)=2^x-x^2$ 的图象，求出函数的最大零点：



当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$。

4．教师作出函数 $s(x)=x^2-\log_3 x$ 的图象：



当 $x>0$ 时，$x^2>\log_3 x$。

5．师生一起得出结论：当 $x>4$ 时，$2^x>x^2>\log_3 x$，并且指数函数增长越来越快，对数函数增长越来越慢，幂函数增长介于之间.

教师：以上结论是否具有一般性呢？你能否用实例进行验证？

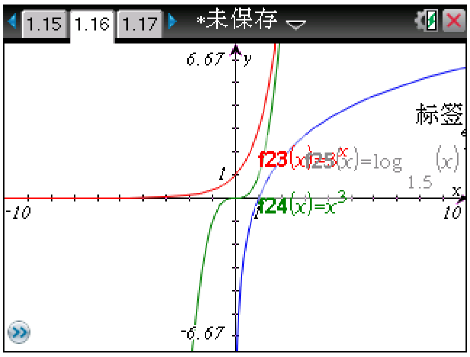
1．将学生分成两组，用研究问题 5 的方法研究给定的一组函数：

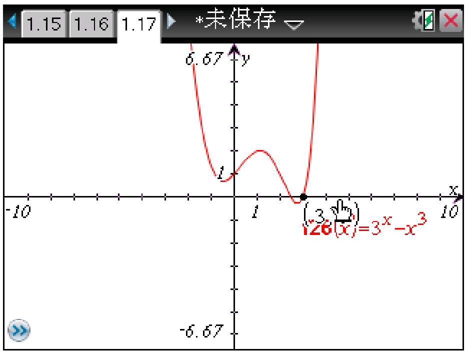
A 组：$y=3^x$，$y=x^3$，$y=\log_{1.5} x$；

B 组：$y=1.1^x$，$y=x^{2.1}$，$y=\log_{1.3} x$；

2．各组学生研究过程中的主要图形界面：

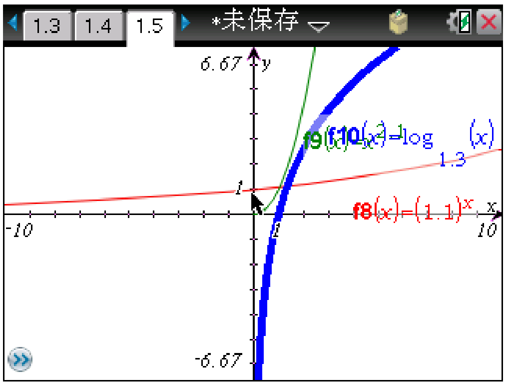
A 组：

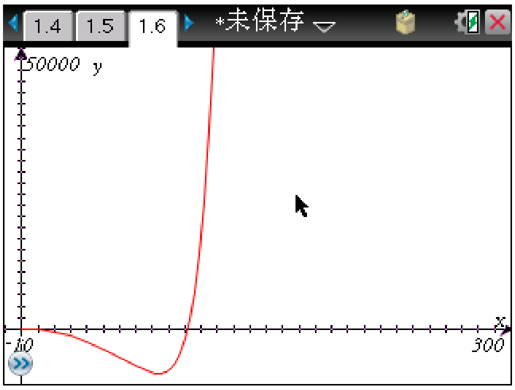


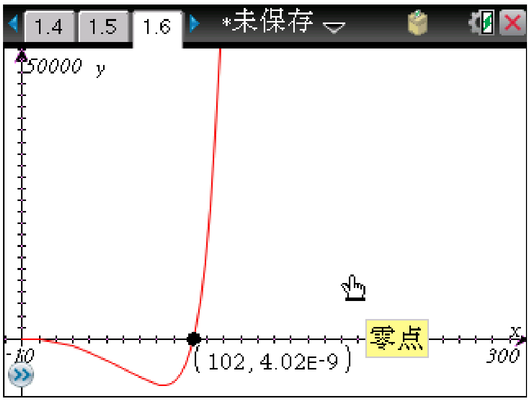


学生得到结论：x>3 时，$3^x > x^3 > \log_{1.5} x$

B 组：







学生代表得出结论： 当 x>102 时，$1.1^x > x^{2.1} > \log_{1.3} x$

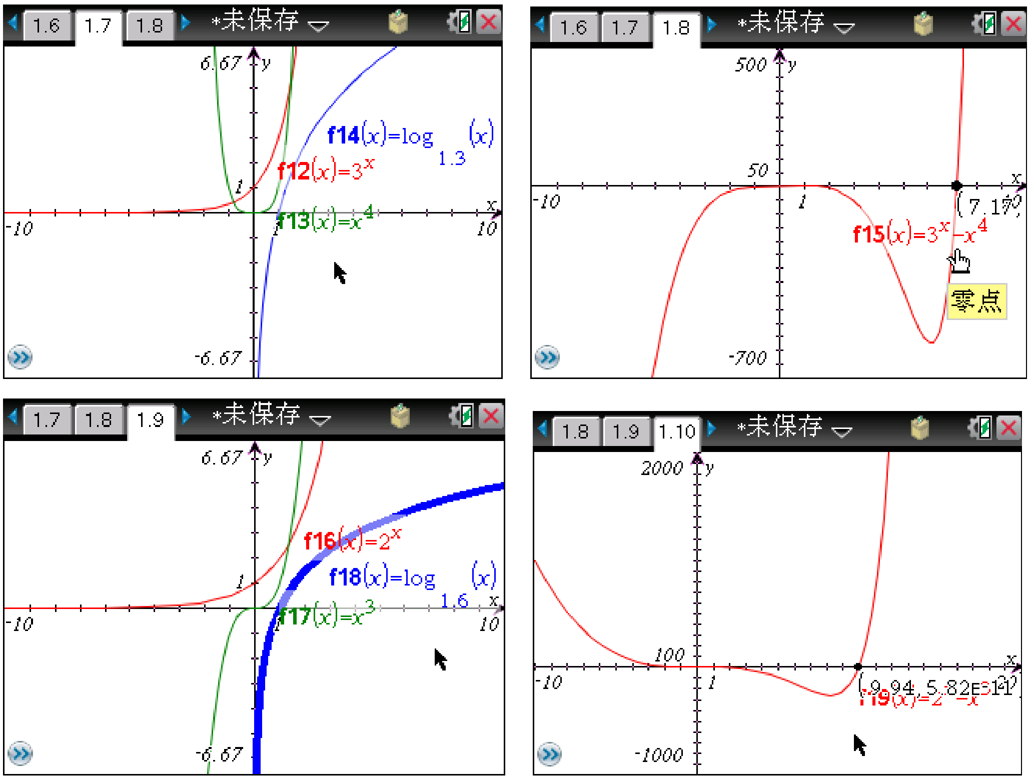
3．引导学生归纳出结论： 在区间 $(0,+\infty)$ 上，尽管 $y=a^x(a>1)$， $y=x^n(n>0)$ 和 $y=\log_b x(b>1)$ 都是增函数，但它们的增长速度不同，而且不在同一个“档次”上，随着 x 的增大， $y=a^x(a>1)$ 的增长速度越来越快，会超过并远远大于 $y=x^n(n>0)$ 的增长速

度，而 $y=\log_b x(b>1)$ 的增长速度则会越来越慢，因此，总会存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，

就有 $a^x>x^n>\log_b x$.

教师：请大家找出 x_0，使 $x>x_0$ 时，就有

（1）$3^x>x^4>\log_{1.3}x$；　　（2）$2^x>x^3>\log_{1.6}x$。



三、拓展延伸，升华能力

教师：大家课后思考这个问题：如果让你研究指数函数、对数函数、幂函数的衰减差异，你会怎么做?

作业：课本 P_{107}B 组 1.

点评：

深圳市第二实验学校彭青老师的课《不同函数模型增长差异的比较》，在利用教育技术为学生创造积极思考、主动学习的平台，构建高效课堂方面作出了示范。下面我们进行简要点评。

1．本课不仅重视不同函数模型增长差异的定性判断，同时重视定量刻画，使学生对指数函数、对数函数与幂函数的增长差异有了较为深刻的印象，并感受到了数学研究方法的基本过程。彭老师在本课中，没有简单地提出不同的函数模型让学生比较，而是通过具体实例，让学生真切地感受到指数爆炸的含义，并以此作为参照去理解指数函数、对数函数与幂函数的增长差异，使知识原理构建的过程朴素自然。

2．本课充分利用教育技术创设教学平台，使学生在积极主动的状态中紧密

围绕教学目标进行学习。让学生使用图形计算器画出各种函数图象去观察，通过计算函数值增量去体会，不仅自己可以发现函数的增长差异，而且从中体会到了“做数学”的快乐与“味道”，使得教学重点突出，教学难点轻松突破。

3．本课的教学过程设计合理，所提问题对教学目标进行了恰到好处的分解。问题 1 引出课题，为体会函数模型的增长差异建立了参照；问题 2、3、4 解决了同类函数模型增长差异的比较；问题 5、6 解决了不同类函数模型增长差异的比较，延拓了教材上的结论；作业的设置让学生进一步辩证地认识指数函数、对数函数、幂函数这三类重要函数模型，掌握利用手持技术平台研究函数的一般方法并巩固本节课所学知识。

基于以上原因，我们认为本课是一堂设计合理，实施恰当的好课。