# 利用 TI 编程功能解决数论问题

北京宏志中学　　徐德前　　　100013

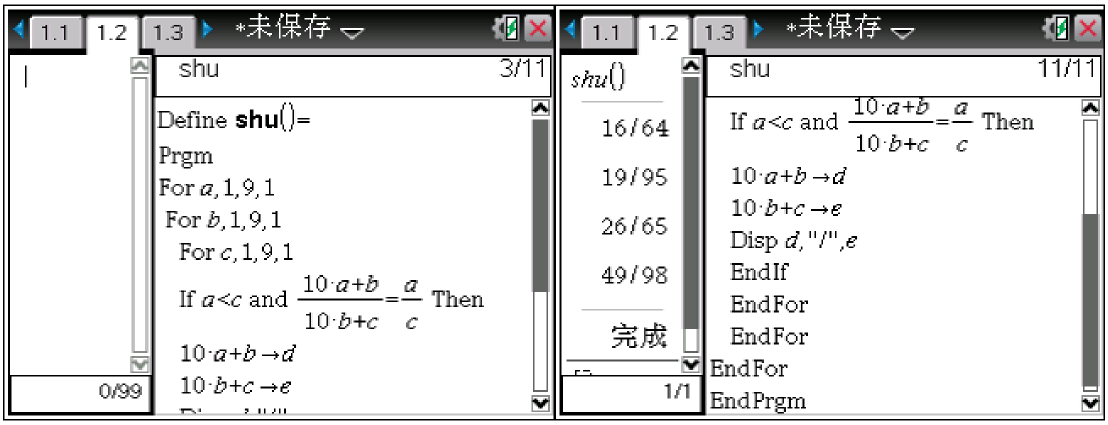
笔者 2011 年 6 月参加了在上海举办的 TI 年会，得到了一份上海市 TI 杯高二数学竞赛的汇编材料.该竞赛试题设计有应用图形计算器的试题，学生解答全部试题可以使用包括图形计算器在内的各种型号计算器.试题中有不少关于数论方面的问题颇有新意，笔者选择了其中几道利用 TI 的编程功能加以解决，主要涉及到算法结构中的循环结构和选择结构.本文使用的计算器为 TI-*nspire* cx CAS 图形计算器.

**例一　2007 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛个人赛试题第四题**

我们知道，$\frac{49}{98}$ 约分后是 $\frac{1}{2}$，但按下面的方法，居然也得 $\frac{1}{2}$：$\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$．试求出所有分子和分母都是十进制两位正整数，分子的个位数与分母的十位数相同，且具有上述“奇怪”性质的真分数.

解：原题的解答进行了分类讨论，过程较长，如果使用编程则可以很快的解决问题.设真分数 $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ 具有以上性质，由题意可知 $\overline{ab}<\overline{bc}$，$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{a}{c}<1$，

于是 $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$.输入下图中的程序语句，运行程序得到满足题意的真分数有 $\frac{16}{64}$，$\frac{19}{95}$，$\frac{26}{65}$，$\frac{49}{98}$．



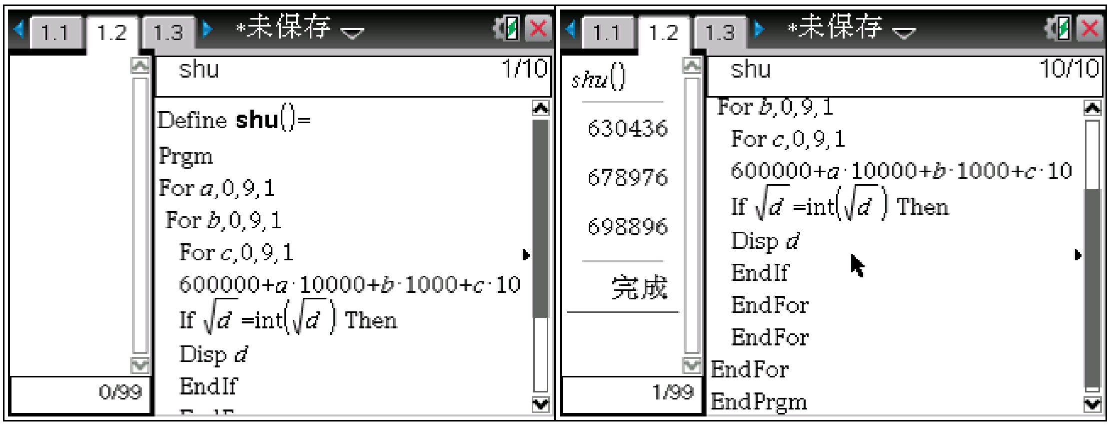

**说明：本题涉及到算法结构中循环结构的嵌套使用，**以 $a,b,c$ 为循环变量，**为减少程序代码，使用了 FOR-ENDFOR 语句.**

例二 2011 年上海市 **T I** 杯高二年级数学竞赛个人赛试题填空题第 **8** 题

一个六位数 $\overline{6xyzx6}$（$x,y,z$ **可以相等）是完全平方数，则所有这样的六位数为__**

解：本题涉及到三层循环结构的嵌套使用，以 $a,b,c$ 为循环变量.程序语句如下图，

运行程序得到满足题意的整数有 630436, 678976, 698896 .



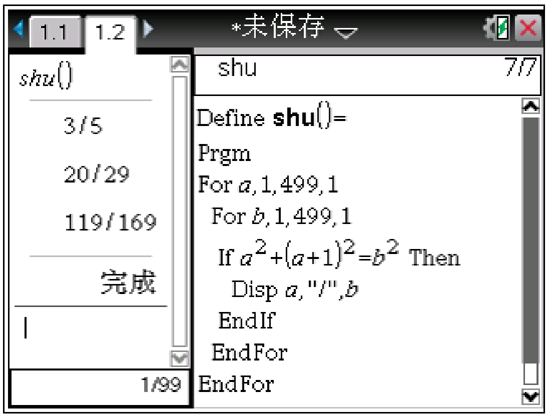

**说明：函数命令 int 是对整数进行取整运算.**

例三 2010 年上海市 **T I** 杯高二年级数学竞赛个人赛试题填空题第 **6** 题

正整数 $a,b$ 均小于 500，且满足 $a^2+(a+1)^2=b^2$，则这样的数对 $(a,b)$ 有______对

解：本题涉及到两层循环结构的嵌套使用，以 $a,b$ 为循环变量.程序语句如下图，

运行程序满足题意的数对 $(a,b)$ 有 $(3,5),(20,29),(119,169)$ 三对.



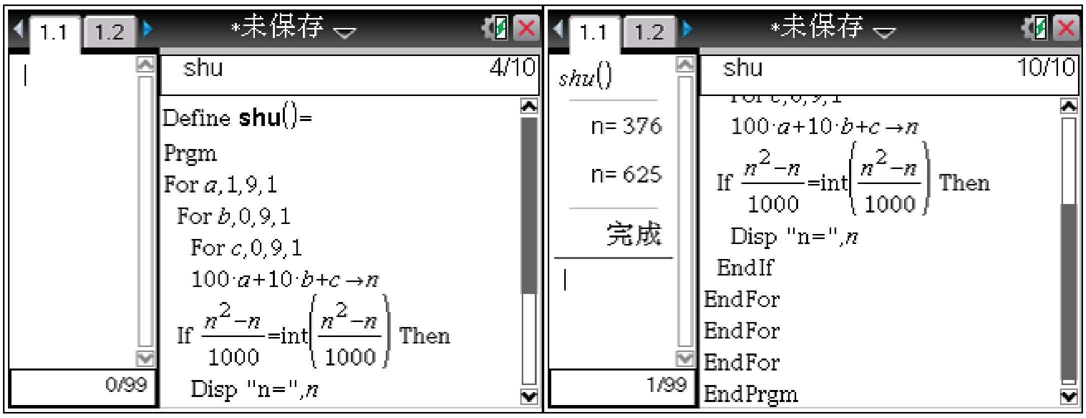

例四 2008 年上海市 **T I** 杯高二年级数学竞赛个人赛试题填空题第 **5** 题

若一个三位正整数的平方的最后三位数与原数相同，则满足条件的所有三位数为__________.

解：本题涉及到三层循环结构的嵌套使用，以 $a,b,c$ 为循环变量.循环体中核心语句是条件语句，满足：$\overline{abc}^2-\overline{abc}$ 是1000的整数倍. 运行程序满足题意正整数

有 $376, 625$.

**说明：函数命令 int 是对整数进行取整运算.**




例五 2006 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛个人赛试题第四题

**设 $n$ 为大于 $1$ 的正整数，若存在正整数 $i(i<n)$，使得**

$(1^2+2^2+\cdots+i^2)-[(i+1)^2+(i+2)^2+\cdots+n^2]$ 是一个完全平方数，则称 $n$ 为“TI 数”.

例如 $(1^2+2^2+\cdots+9^2)-(10^2+11^2)=8^2$，知 $11$ 是“TI 数”.问：$46, 36, 26$ 是不是“TI 数”？为什么？

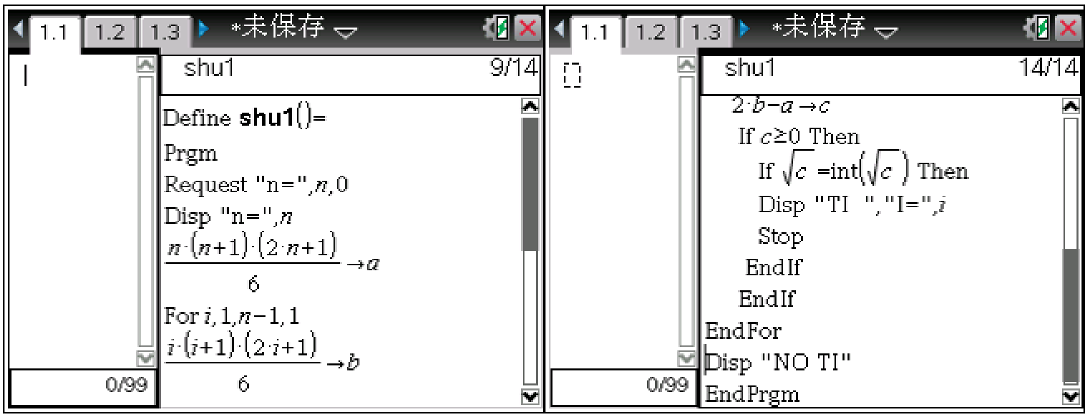
解：本题涉及到整数的平方运算，利用计算器不难求出

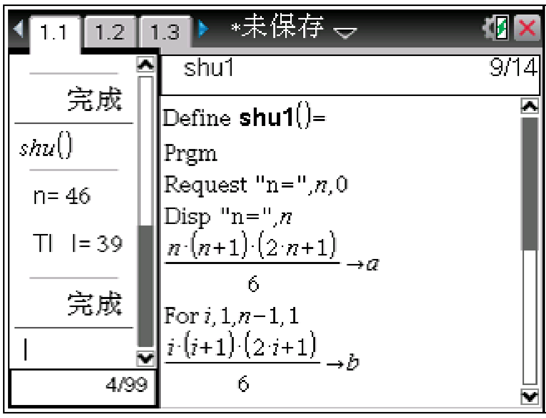
$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，利用此结果可大大减少运算量.令

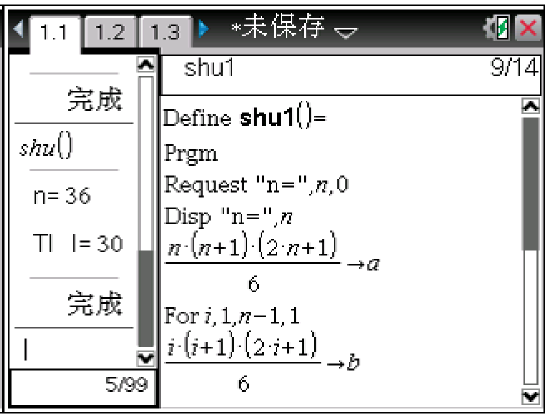
$1^2+2^2+\cdots+i^2+\cdots+n^2=a$，$1^2+2^2+\cdots+i^2=b$，则

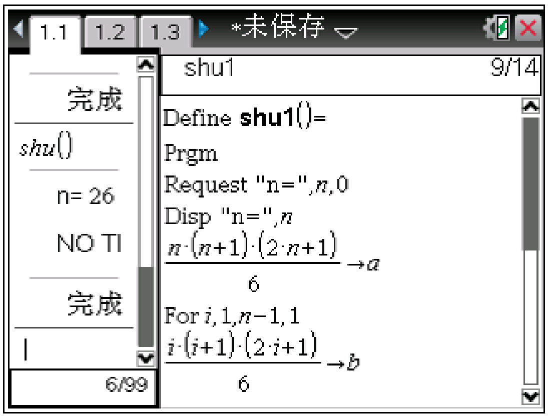
$(1^2+2^2+\cdots+i^2)-[(i+1)^2+(i+2)^2+\cdots+n^2]=2b-a$。

程序语句如下图，运行程序可知，$46, 36$ 是“TI 数”，而 $26$ 不是“TI 数”.










**说明：函数命令 int 是对整数进行取整运算.**

以上几个例题都采用列举法即对问题所有的可能一一查看是否符合要求，算法中循环结构是解决此类问题的最佳途径.考虑到 TI 运算的速度较慢，有必要对题目的核心条件进行优化处理，以减少运算时间，提高算法效率，同时也可以通过这些例题让部分学有余力的学生在编写程序时形成良好的习惯，鼓励算法的多样化.

ＴＩ图形计算器的程序功能，为 ＴＩ 技术提供了理解、探索数学的平台，把数学变得更容易理解，使数学走向生活，走向现实，让数学教学更加生动活泼，真正从书本中、课堂上、考试中走出来，回到数学教学的本体上.