TI 图形计算器对一个变换问题的研究

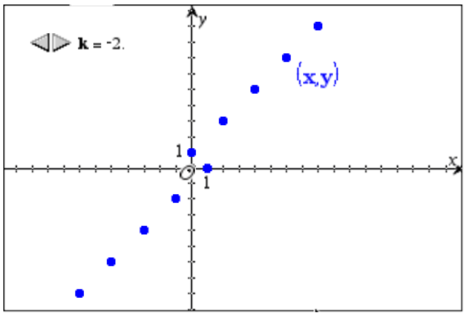
南京市第十二中学　张小兵（210011）

问题：设二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{bmatrix}$（$k\in$R），$A\cdot\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$($n$ 为正整数)，其中 $x_0=1,y_0=0$，则序列 $A_n(x_n,y_n)$ $A_n(x_n,y_n)$ 有什么特点？该问题的几何意义是点 $A_0(1,0)$ 反复经过矩阵 A 对应的变换作用下得到的迭代点列在直角坐标系中的分布有何规律？笔者采用 TI-nspire cx CAS 图形计算器这一问题进行了初步的研究，得到了一些有趣的结论。

一．初步观察

k 先取几个简单的数值看看，利用 TI 图形计算器作出 $A_n(x_n,y_n)$ 的散点图，初步观察得到如下结论：k=0 时，迭代点列 $A_n(x_n,y_n)$ 在四个点（1，0），（0，1），（-1，0），（0，-1）间循环；k=1 时，点列 $A_n(x_n,y_n)$ 在六个点（1，0），（0，1），（-1，1），（-1，0），（0，-1），（1，-1）间循环；k=-1 时，点列 $A_n(x_n,y_n)$ 在三个点（1，0），（0，1），（-1，-1）间循环；k=2 时，点列 $A_n(x_n,y_n)$ 位于一条直线上且趋向于无穷远；k=-2 时，点列 $A_n(x_n,y_n)$ 位于两条平行直线上且趋向于无穷远；$k=\dfrac{1}{2}$ 时，点列 $A_n(x_n,y_n)$ 位于一个椭圆上且相邻两点的连线也围成一个椭圆（如图 1）；k=3 时，点列 $A_n(x_n,y_n)$ 相邻两点的连线呈一条折线状并趋向于无穷远。

初步观察的结果令人兴奋，借助于 TI 图形计算器使我们更加容易地看到数学的美丽！



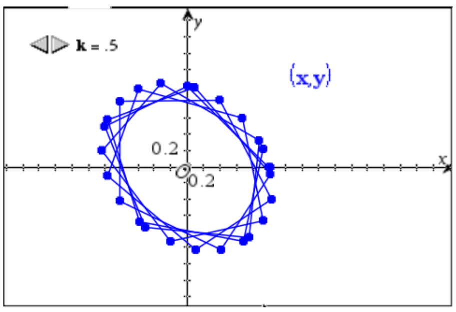


图 1

二．理论思考

k=0，1，-1 的情形只要作简单的计算即可，对于 k=2 的情形，证明如下：

$$由\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}得\begin{cases}x_n=-y_{n-1}\\ y_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\end{cases},$$

消去 y_n,y_{n-1} 得 $x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=0$ 即 $x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}$，所以数列$\{x_n\}$为等差数列，由 $x_0=1,y_0=0$ 得 $x_1=0,y_1=1$，从而数列 $\{x_n\}$ 的公差为 $x_1-x_0=-1$，所以

$x_n=-n+1, y_n=-x_{n+1}=n$（n∈N），所以迭代点列 $A_n(x_n,y_n)$ 位于直线 $x+y=1$ 上.

$k=\frac{1}{2}$ 时，迭代点列 $A_n(x_n,y_n)$ 所在椭圆的方程是什么呢？在点列 A_n 中取前五个点（1，0），（0，1），（-1，0.5），（-0.5，-0.75），（0.75，-0.875），利用图形计算器作过五点的圆锥曲线功能拟合得到如图 2 所示的椭圆方程 $x^2+\frac{1}{2}xy+y^2-1=0$（*）.这个结果可以用数学归纳法得到证明.

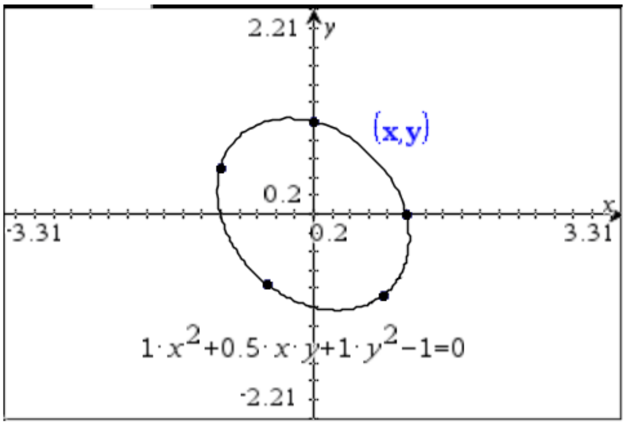


图 2

证明：n=0 时，初始点（1，0）显然满足方程（*），若点 (x_{n-1},y_{n-1}) 满足方程（*），即 $x_{n-1}{}^2+\frac{1}{2}x_{n-1}y_{n-1}+y_{n-1}{}^2-1=0$，由 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}$ 得 $\begin{cases}x_n=-y_{n-1}\\ y_n=x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1}\end{cases}$，因为

$$x_n{}^2+\frac{1}{2}x_ny_n+y_n{}^2-1=(-y_{n-1})^2+\frac{1}{2}(-y_{n-1})(x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1})+(x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1})^2-1$$

$$=y^2{}_{n-1}-\frac{1}{2}x_{n-1}y_{n-1}-\frac{1}{4}y^2{}_{n-1}+x^2{}_{n-1}+x_{n-1}y_{n-1}+\frac{1}{4}y^2{}_{n-1}-1$$

$$=y^2{}_{n-1}+\frac{1}{2}x_{n-1}y_{n-1}+x^2{}_{n-1}-1$$

$$=0$$

所以点 (x_n,y_n) 也满足方程（*），

这就证明了当 $k=\frac{1}{2}$ 时，迭代点列 $A_n(x_n,y_n)$ 都位于椭圆 $x^2+\frac{1}{2}xy+y^2-1=0$ 上.

理论思考有助于认识现象背后的本质，TI 图形计算器使数学发现变得更容易！

三．更上层楼

对于不同的 k，猜想迭代点列 $A_n(x_n,y_n)$ 位于曲线 $x^2+kxy+y^2-1=0$ 上.k=0，±1，±2 时容易证明上述猜想是成立的，对于其它情形，利用图形计算器作出曲线 $x^2+kxy+y^2-1=0$，并改变 k 的值可以从直观上验证上述猜想是成立的！（如图 3），这个

结论同样可用数学归纳法得到证明，此处从略。

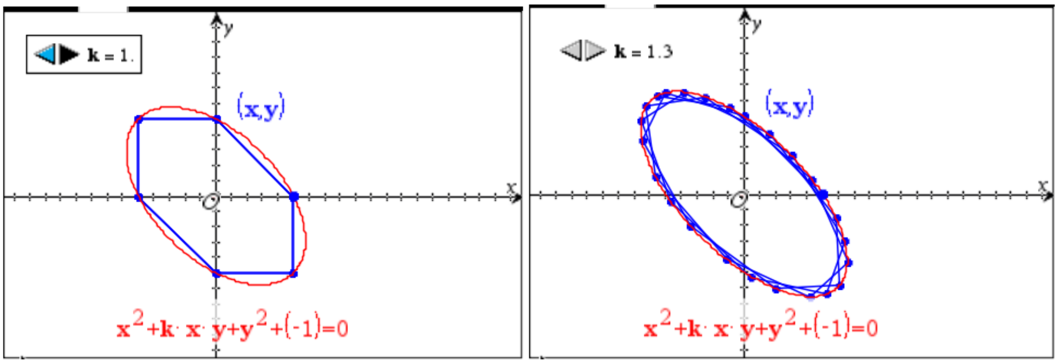


图 3

从特殊到一般是人类认识事物的普遍规律，TI 图形计算器可帮我们快速作出判断！随时检验我们的猜想.

四．豁然开朗

当 k 取不同的值时，方程 $x^2+kxy+y^2-1=0$ 表示什么曲线？用 TI 图形计算器分析出该曲线的对称轴为 $y=\pm x$，由此我们对上述曲线作绕原点按逆时针方向旋转 45^{O} 的旋转变换

$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$，令点 $P(x_0,y_0)$ 是曲线 $x^2+kxy+y^2-1=0$ 上任意一点，变换后的点为

$P'(x,y)$ 由 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，得 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0-y_0) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0+y_0) \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}$ 代入方程 $x^2+kxy+y^2-1=0$，

化简整理得到方程 $(1-\frac{k}{2})x^2+(1+\frac{k}{2})y^2=1$ （**）

（1）k=0 时，方程（**）表示单位圆；

（2）k=±2 时，方程（**）表示两条平行直线；

（3）当-2<k<2 且 k≠0 时，方程（**）表示椭圆；

（4）当 k<-2 或 k>2 时，方程（**）表示双曲线.

至此，原先的问题已经得到圆满解决，TI 图形计算器功不可没！

五．又一问题

点列 $A_n(x_n,y_n)$ 中的横、纵坐标的通项公式如何求得？以 $k=\frac{1}{2}$ 为例，由

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}\text{得}\begin{cases}x_n=-y_{n-1}\\ y_n=x_{n-1}+\dfrac{1}{2}y_{n-1}\end{cases}\text{，消去 } y_{n-1},y_n \text{ 得 } x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n+x_{n-1}=0$$

其特征方程为 $\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda+1=0$，解得 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{4},\lambda_2=\frac{1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}$

令 $x_n=c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}\right)^n+c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}\right)^n$ 代入初始条件 $x_0=1,x_1=0$ 得

$$\begin{cases}c_1+c_2=1\\ \dfrac{1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}c_1+\dfrac{1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}c_2=0\end{cases}\text{，解得}\begin{cases}c_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{30}\cdot\mathrm{i}\\ c_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{30}\cdot\mathrm{i}\end{cases}\text{，从而}$$

$$x_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}\mathrm{i}}{30}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}\mathrm{i}}{30}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}\right)^n$$

$$y_n=-x_{n+1}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}\mathrm{i}}{30}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}\mathrm{i}}{30}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}\right)^{n+1}\quad（n\in\mathrm{N}）$$

上面的 x_n 可用图形计算器进行检验（如图 4）

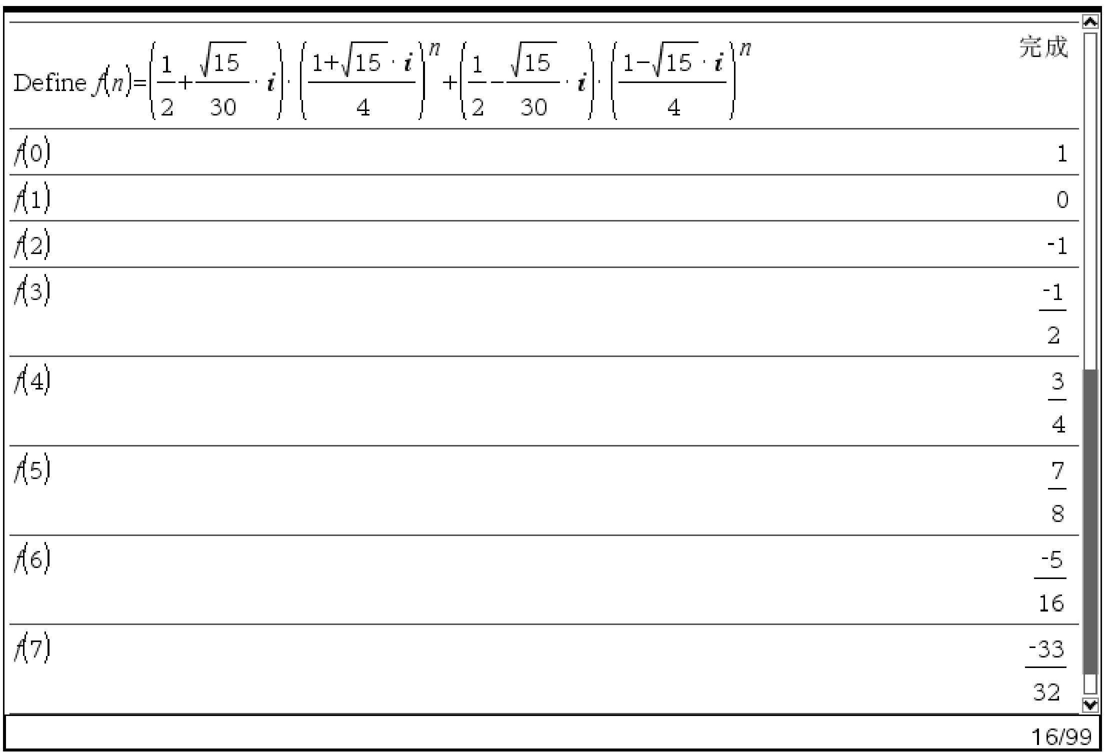


图 4

对于其它 k 的取值，只要按上述方法求出相关递推数列的通项即可，TI 图形计算器可以帮助我们检验所求得的结果的可靠性！

五．新的问题

若点 $A_0(1,0)$ 在矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{bmatrix}$ 经过 m（$m\geqslant 3$，$m\in$N）次相同变换后又回到原来的位置，则 k 应该如何取值？这相当于解方程 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{bmatrix}^m\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，利用图形计算器可以得到下面的结果（如图 5）：

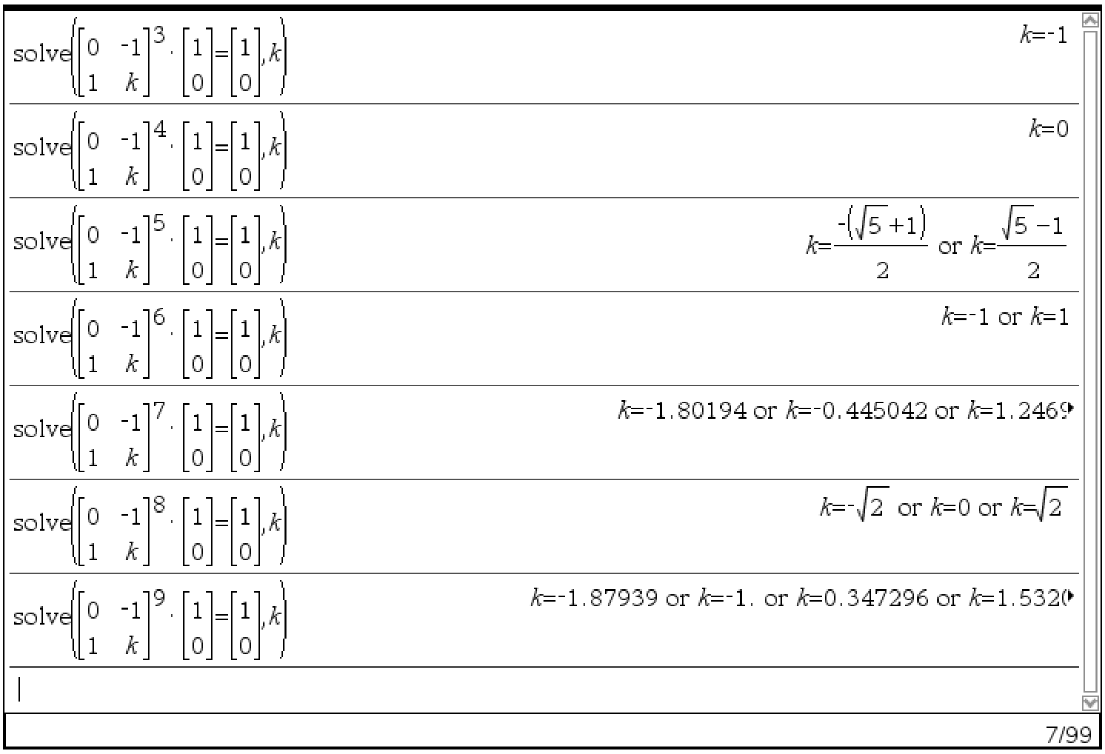


图 5

依次连结这 m 个点得到的图形也很有趣：

（1）m=3 时，三个点构成一个等腰三角形；

（2）m=4 时四个点恰好构成一个正方形；

（3）m=5 时 k 出现了两个不同的值，五个点可以构成一个五边形或五角星（如图 6）；

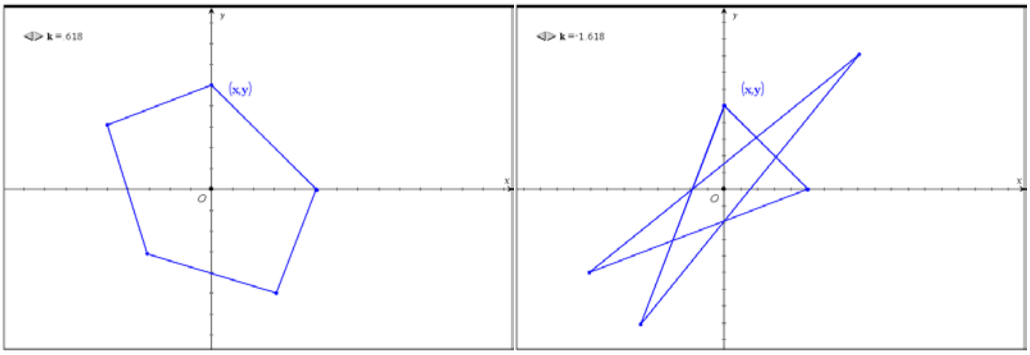


图 6

（4）m=6 时，k 有两个值，其中 k=-1 时就是 m=3 时循环 2 次，k=1 时，六个点构成一个六边形；

（5）$m=7$ 时，k 有三个值，相应的七个点构成两种七角星或七边形(如图 7)；

……

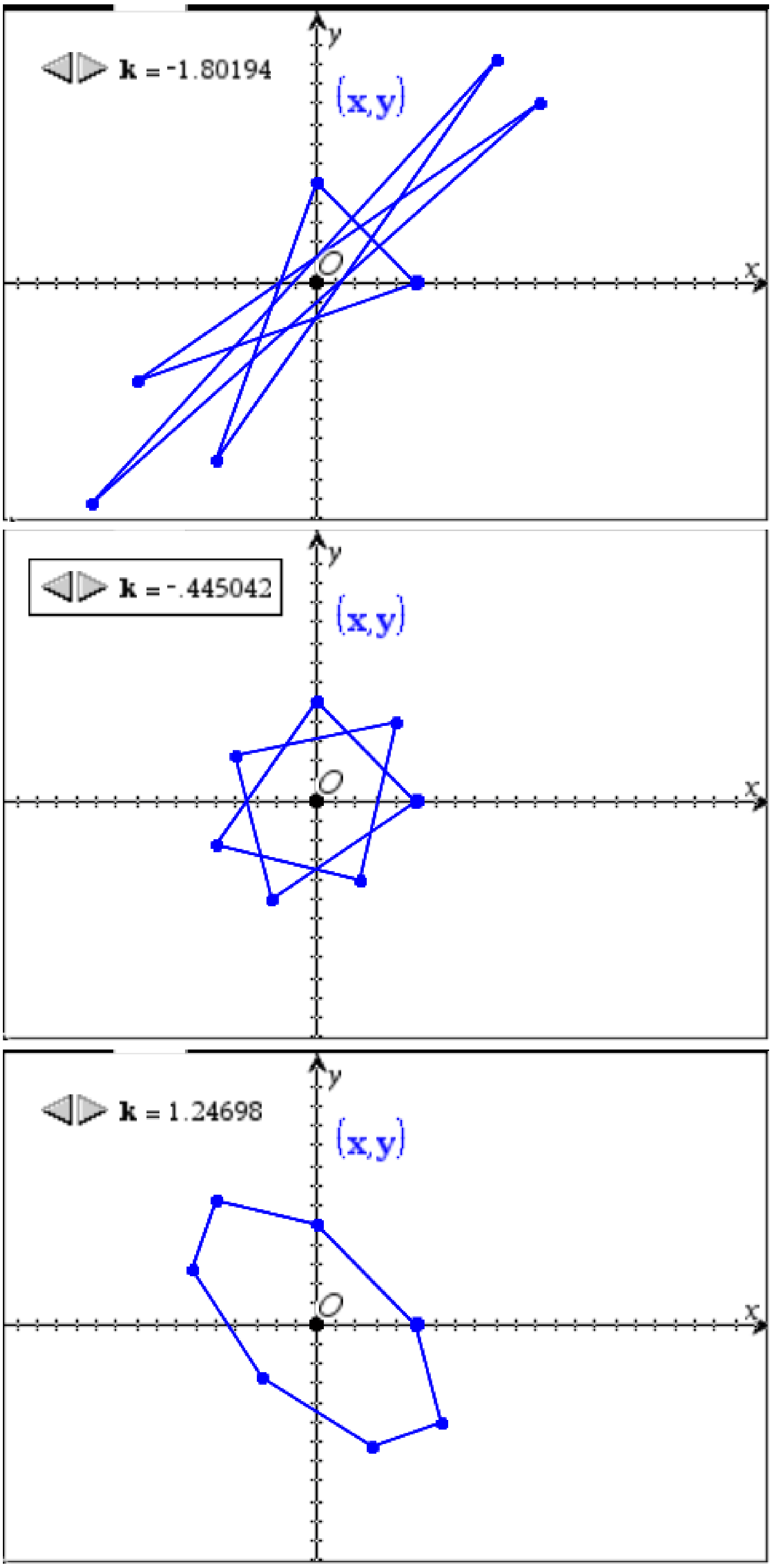


图 7

数学中从来不缺乏问题，而是缺乏发现问题的眼光，带 CAS（Computer Algebra System，计算机代数系统之意）功能的 TI 图形计算器为数学问题的研究插上了翅膀！

七．永无止境

旧的问题得到了解决，新的问题层出不穷。如当$-2<k<2$时，相邻两点的连线（包络线）围成的椭圆（或圆）的方程是什么？它与原先的椭圆（或圆）有什么关系？将矩阵$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{bmatrix}$换成其它矩阵甚至更一般的矩阵会得到什么结果？

结语：TI 图形计算器为数学问题的研究提供了很好的平台，它强大的计算功能减轻了很多人工运算的负担，强大的作图功能可以让数学变得更加形象，其便携性可以让我们随时随地地开展数学研究。