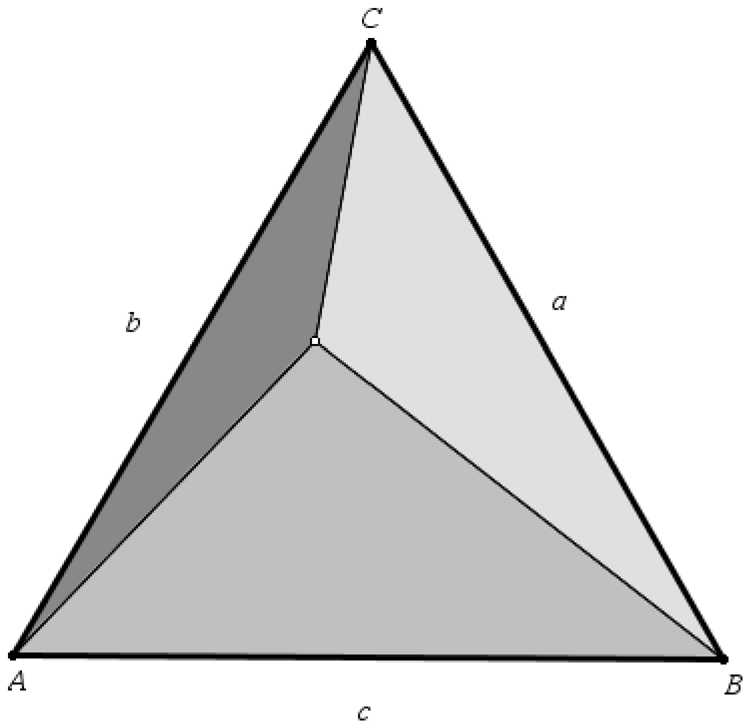
Mandatfordelinger ved valg

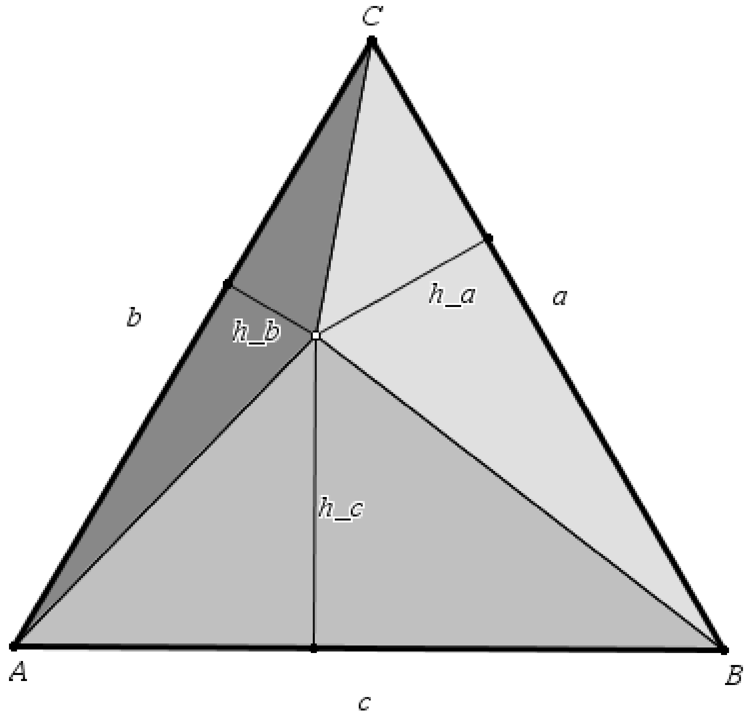
I denne note vil vi prøve at beskrive et nyttigt diagram når man skal analysere problemstillinger vedrørende mandatfordelinger. For at holde diagrammet enkelt ser man på den problemstilling, hvor kun tre valggrupper A, B og C skal fordele de mandater, der er til rådighed i forhold til deres stemmetal. Valggrupperne kan enten bestå af et enkelt parti eller et valgforbund af partier.

De tre valggrupper A, B og C repræsenteres da ved de tre hjørner i en ligebenet trekant. Selve trekanten – dvs. egentlig arealet af trekanten - repræsenterer det samlede stemmetal. Ethvert punkt i trekanten – på randen eller i det indre – repræsenterer de te andele, som de tre valggrupper har opnået af stemmerne, idet punktet splitter den store trekant i tre deltrekanter. Det er altså arealerne af disse tre trekanter, der fastlægger hvor stor en brøkdel, valggruppen har fået af det pågældende valgs stemmer, idet trekanten med grundsiden c repræsenterer C's andel osv.

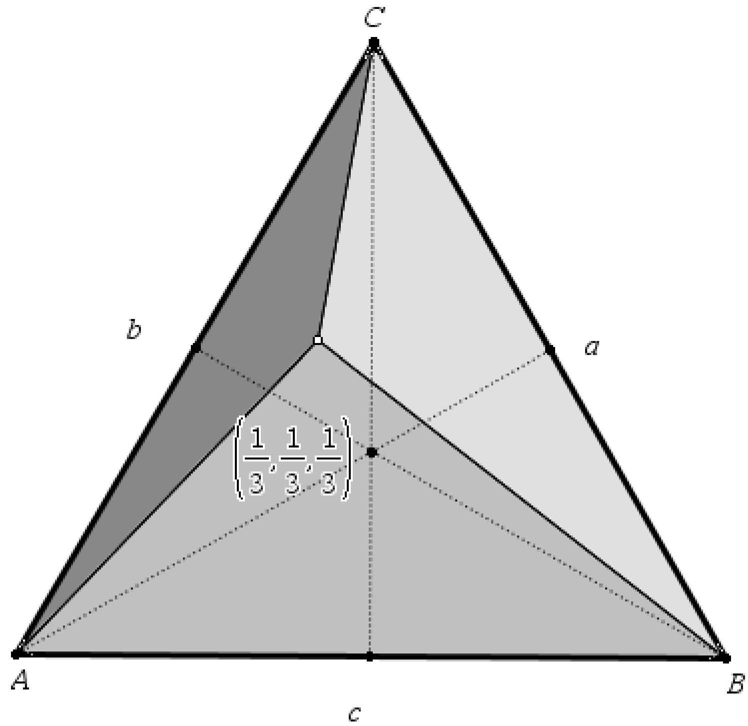


Da de tre deltrekanter har samme grundside, idet den store trekant er ligesidet, bliver arealet af de tre deltrekanter proportionalt med højderne for de tre deltrekanter, dvs. med afstanden fra det indre punkt til siderne. De tre sider kan derfor opfattes som tre akser, hvor koordinaten er repræsenteret af afstanden til aksen.

Læg også mærke til, at hvis vi vælger vores enhed, så den samlede trekant har højden 1, så er de tre højder/afstanden netop tallene for de tre brøkdele, der angiver hvor mange stemmer det pågældende valggruppe har fået.



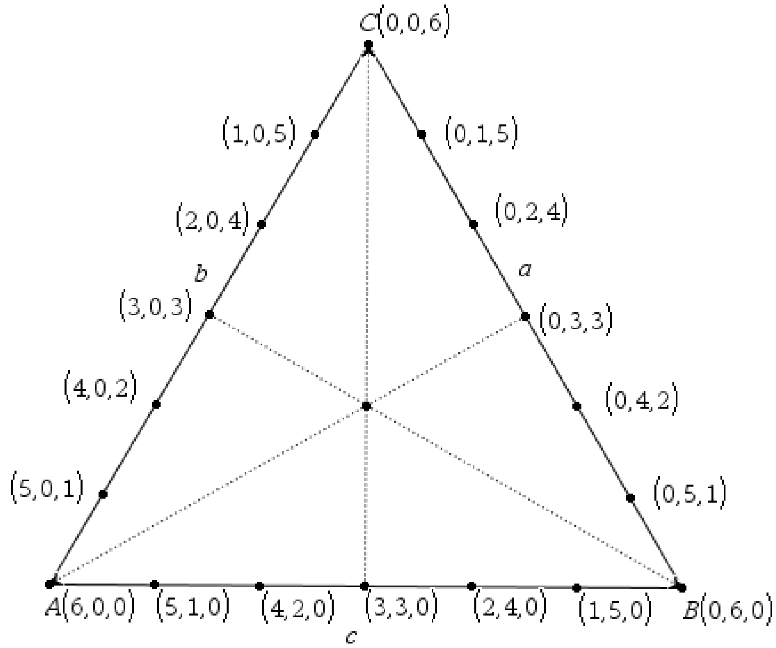
Vi kan faktisk også repræsentere de tre koordinatakser i trekanten ved at tegne højderne i den store trekant (der fungerer som symmetrilinjer for den ligesidede trekant). De kan da opfattes som tallinjer, der starter i 0 på grundlinjen og ender med 1 i det modstående toppunkt. Fx vil trekantens symmetricentrum få koordinaterne $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.



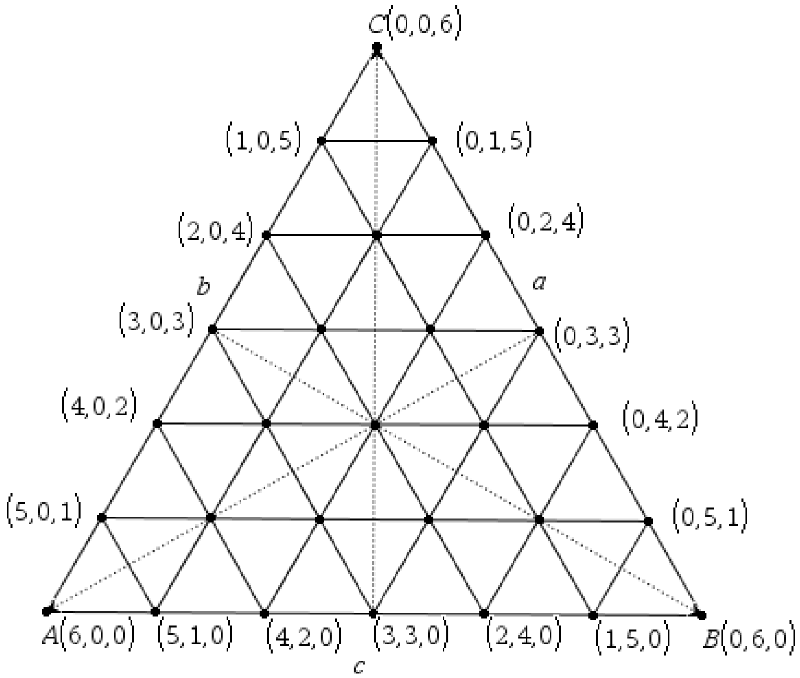
Heraf følger bl.a. at punkter, der ligger på samme vandrette linje har fælles c-koordinat, dvs. fælles andel for C' stemmer og tilsvarende, hvis punkterne ligger på linjer, der er parallelle med en af de andre grundlinjer.
Vi skal nu vælge hvilket antal mandater vi ønsker at fordele. Her vil vi se nærmere på tilfældet n = 6. Symmetricentret, vil da føre til mandatfordelingen (2,2,2), idet de tre valggrupper skal have lige mange stemmer. Tilsvarende vil hjørnepunkterne A, B og C føre til mandatfordelingerne

$$A(6,0,0),\ B(0,6,0) \text{ og } C(0,0,6)$$

Men vi kan nemt finde alle de punkter, hvor mandatfordelingen er uproblematisk: Vi deler først de tre sider a, b og c i 6 lige store dele svarende til at to af valggrupperne deler rovet:

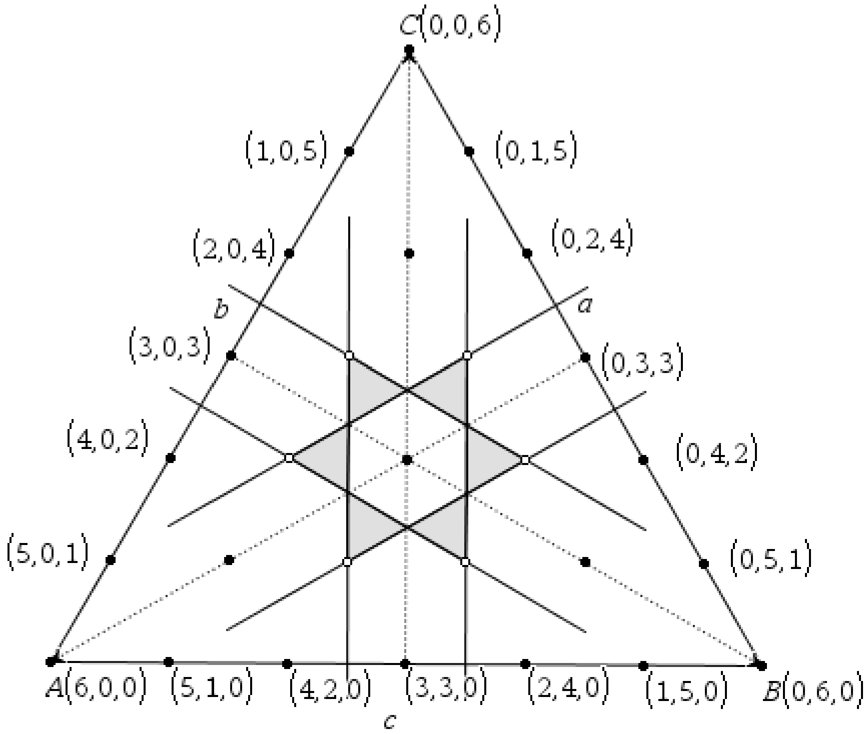


Men trækker vi nu paralleller til de tre grundlinjer vil de skære hinanden i de øvrige gitterpunkter med uproblematiske mandatfordelinger:



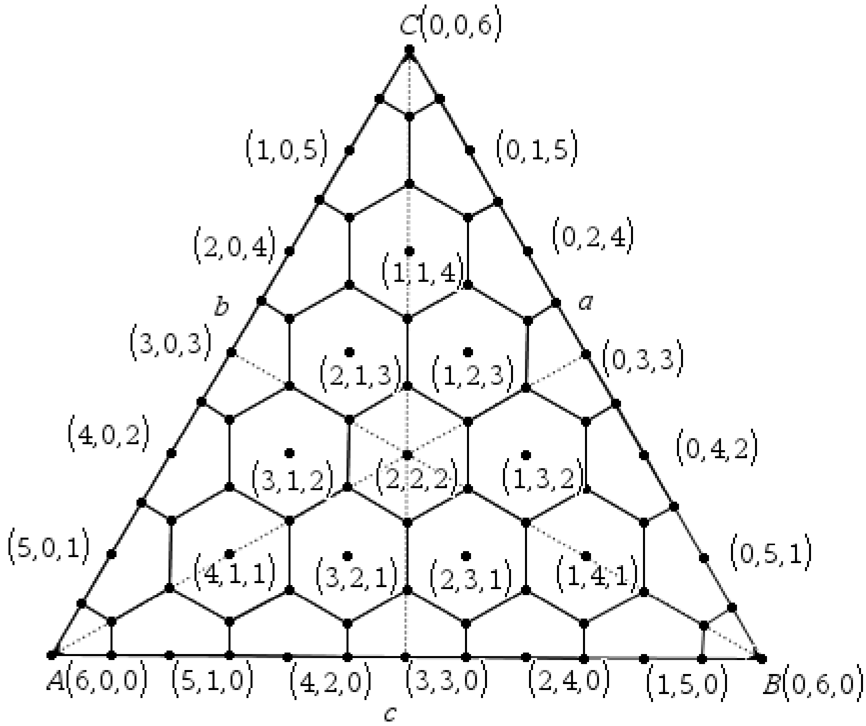
Det viste gitter strukturerer derfor trekanten efter de rene mandatfordelinger, hvor delingsforholdene netop svarer til sjettedele, og mandatfordelingen derfor er uproblematisk. Et sådant gitter kaldes et trekantgitter og der findes faktisk koordinatpapirer med trekantgitre (opdelt ad triangulum) i stedet for det sædvanlige koordinatpapir med kvadratisk gitter (opdalet ad quadratum).

Men hvad gør vi så hvis mandatfordelingen er uren, dvs. hvis det indre punkt ikke rammer et gitterpunkt? Vi opdeler da det indre af trekanten i zoner, således at hvert gitterpunkt er omgivet af en zone. Gitterpunktet 'ejer' da alle punkter inde i zonen, dvs. de får den samme mandatfordeling. Den præcise form for zonen kan vælges på mange måder, men det synes naturligt at zonen skal opbygges så symmetrisk som muligt. Vi vælger derfor de omringende zoner som regulære sekskanter frembragt af midtnormalerne mellem et gitterpunkt og de seks nabogitterpunkter:



Her er konstruktionen vist for det centrale gitterpunkt og dets seks naboer (vist som åbne cirkler). Der opstår da en regulær sekskant: Siderne i denne regulære sekskant ligger altså lige midt mellem det centrale gitterpunkt og et af nabogitterpunkterne. Den lille ligesidede trekant udspændt af siden og det centrale punkt modsvares da af den tilsvarende skraverede trekant hørende til nabogitterpunktet.

Fuldføres konstruktionen for alle gitterpunkterne fås det følgende diagram, hvor hele trekanten nu er opdelt i regulære sekskantede zoner:



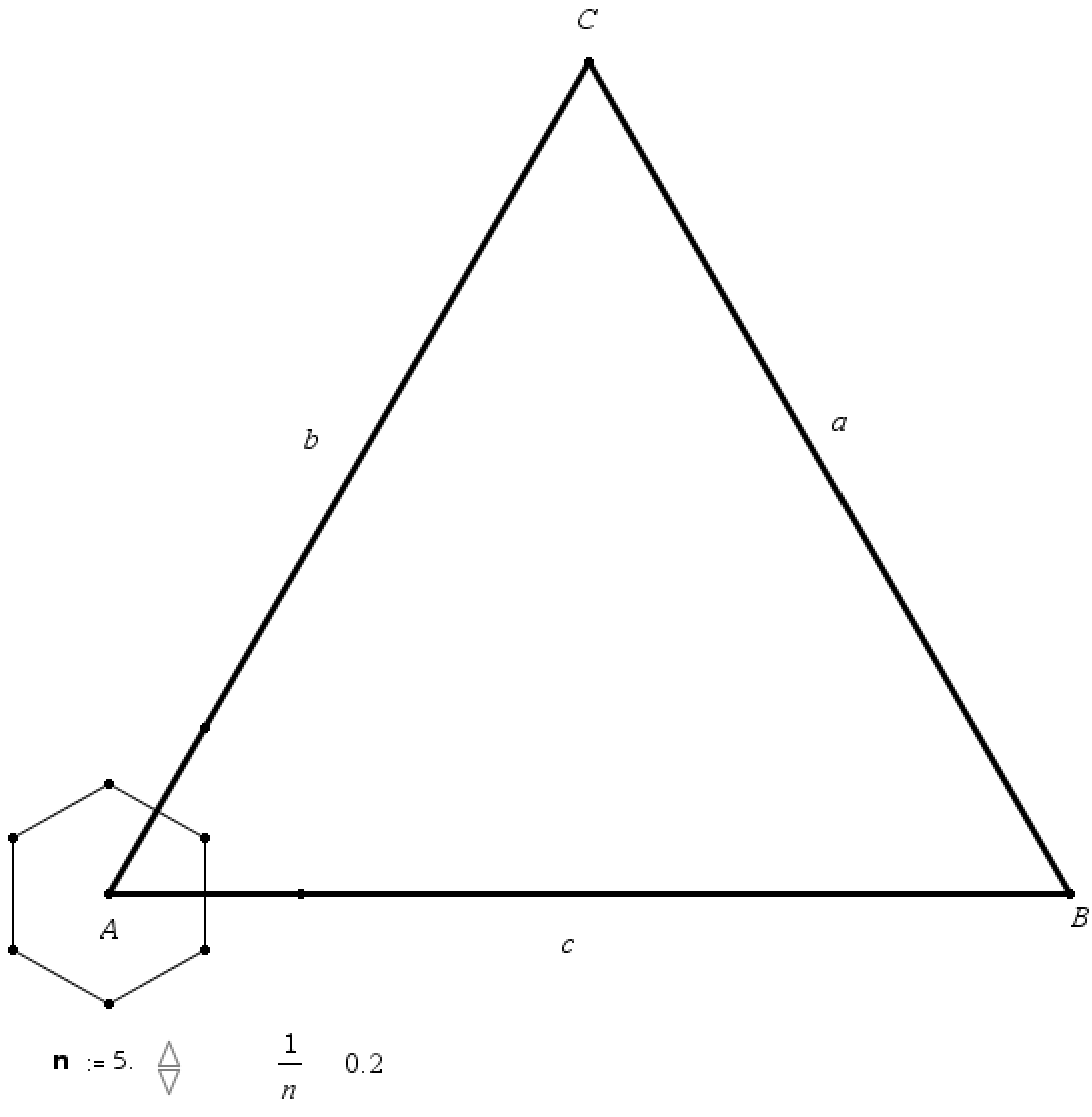
Læg mærke til at hele trekanten på denne måde er opdelt i 10 hele sekskanter, 15 halve sekskanter og 3 sjettedele trekanter, dvs. i alt 18 hele regulære sekskanter.

Hvis vi befinder os inde i en af zonerne er mandatfordelingen altså klar. Men hvad nu, hvis vi befinder os på randen af en zone? Der er da to muligheder: Vi kan befinde os på et linjestykke, der grænser op ti 2 zoner. I så fald er der et enkelt mandat på spil til fordeling mellem de to valggrupper, der ligger på trekantsiden som er vinkelret på siden. Man må da trække lod mellem de to zoner. Eller også befinder vi os i et hjørne af sekskanten, dvs. fælles grænsepunkt for tre zoner. Her skal der fordeles to mandater på to af valggrupperne og man må derfor igen trække lod om hvilken valggruppe, der ikke skal have et mandat. Her må man altså trække lod mellem alle tre zoner.

Denne metode til at fordele mandaterne på kaldes **største brøks metode**. Det er denne metode vi skal undersøge i det følgende og herunder også retfærdiggøre dens navn.

Foreløbig noterer vi os blot at rent geometrisk består den altså simpelthen i at vælge det gitterpunkt, der ligger nærmest!

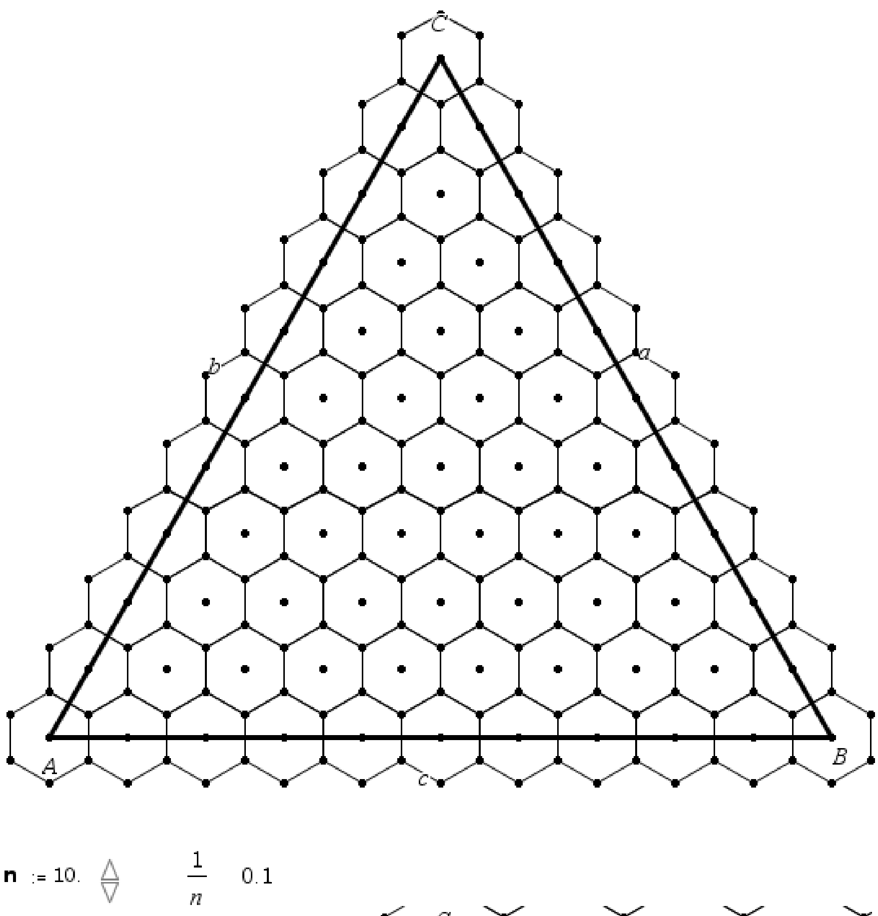
Vi skal da først have fremstillet et dynamisk diagram til at lege med metoden. Vi starter derfor med en ligesidet trekant og en variabel n, der kan gå fra 1 til 10 og som angivet det antal mandater, vi har til fordeling. Herefter beregner vi deleforholdet 1:n og deler linjestykkerne AB og AC i forholdet 1:n ud fra A. Derved frembringes de første trivielle mandatfordelinger langs siderne AB og AC. Vi konstruerer nu midtnormalerne fro de to punktpar ud fra A og deres skæringspunkt, som er et hjørnepunkt i den regulære sekskant, der udgør zonen for A. Vi har dermed konstrueret den første zone!

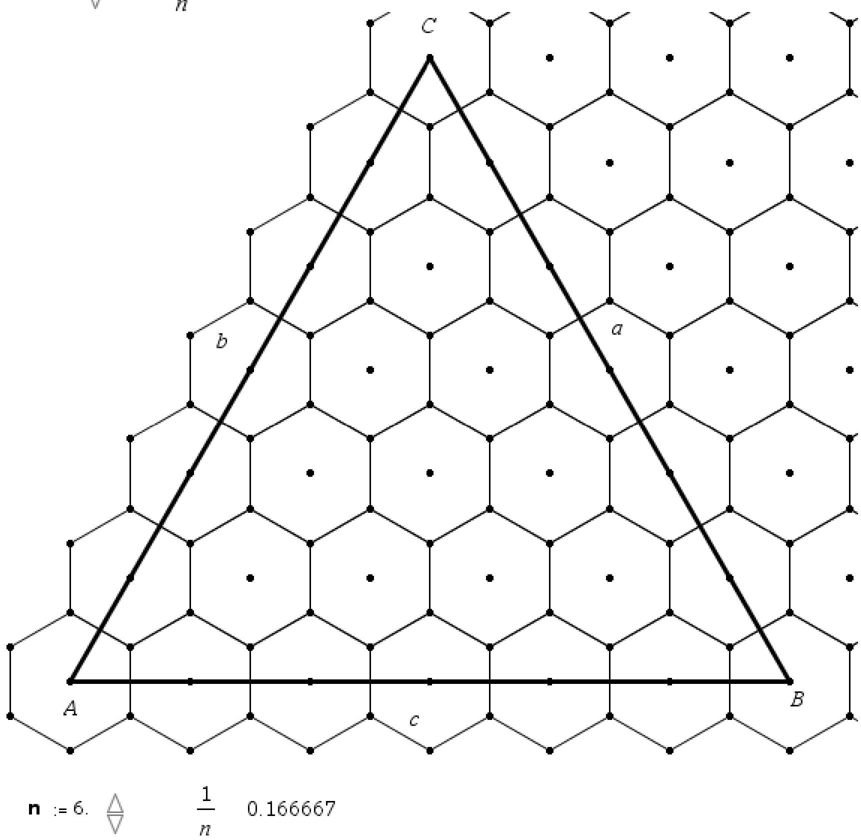


Sæt nu antallet af mandater op til det maksimale antal for modellen, dvs. i vores tilfælde 10. Herefter konstrueres de øvrige sekskanter ved spejlinger i en side, der vender væk fra A. Vi kan da hurtigt få flisebelagt trekanten med regulære sekskantede zoner hørende til alle de trivielle mandatfordelingspunkter. Vi får også brug for sekskanternes centre. De konstrueres sikrest ved at benytte midtpunktskonstruktionen for to modsatte hjørnepunkter.

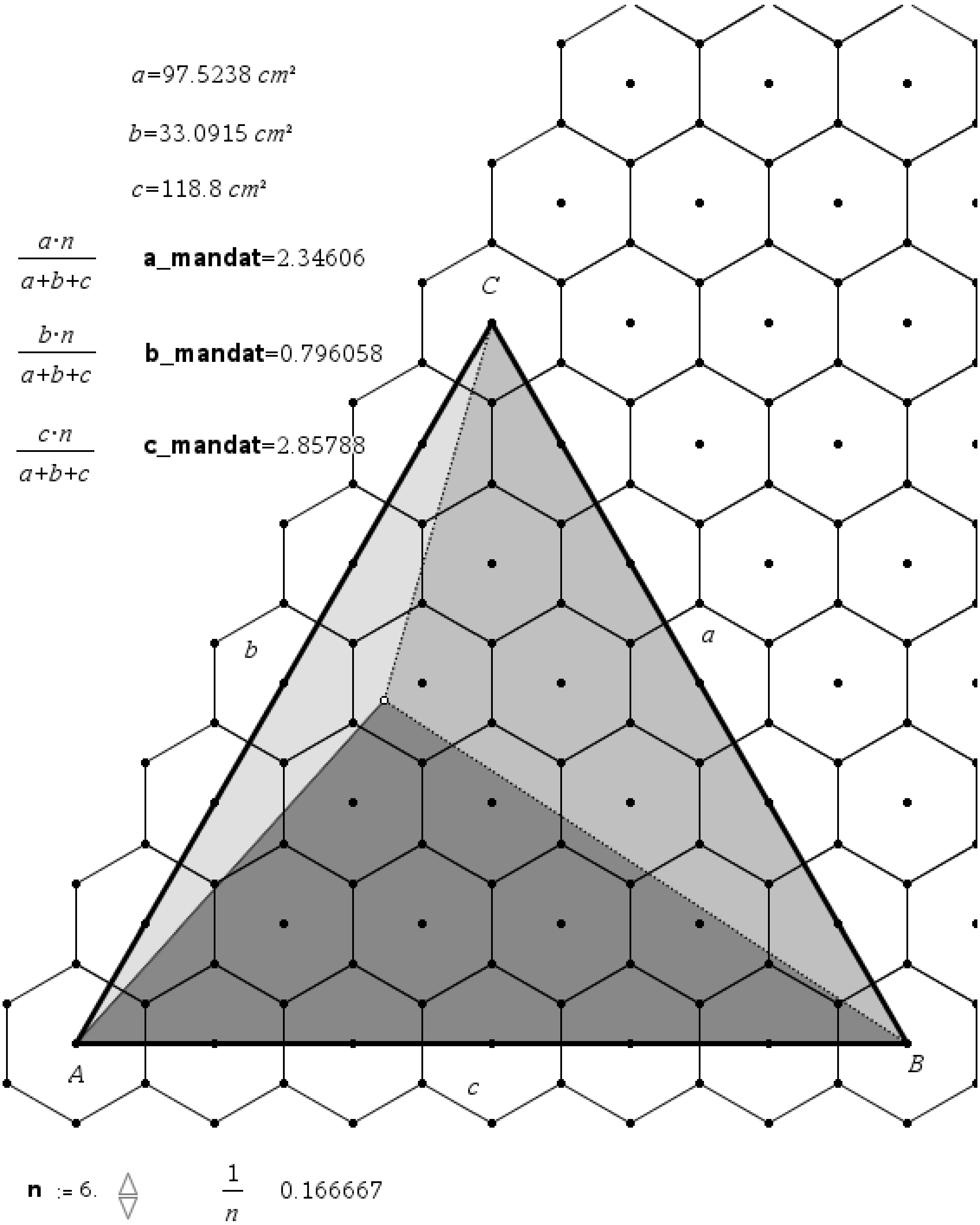
Mini AT-forløb om kommunalvalg: Mandatfordeling og Retfærdighed
1.x og 1.y 2009 ved Ringsted Gymnasium

Konstruktionen er dynamisk og afhænger derfor a antal mandater n. Sættes dette antal ned vokser flisedækningen ud over trekanten, men vi kan jo så bare ignorere de overskydende fliser!





Derefter er vejen banet for at for at finde mandatfordelingen ved opmåling af arealerne:



Du kan nu selv lege med modellen. Prøv fx at finde ud af hvad det er, der sker, når man passerer kanten af en zone eller befinder sig i et hjørne for en zone.

Kan du nu forklare hvorfor det hedder største brøks metode?

Vi kan også koble et regneark på og derved udregne mandattallet helt præcist efter største brøks metode. Vi overfører da mandattallene med decimaler til regnearket og udregner dels heltalsdelen, dels brøkdelen:

	A valggruppe	B mandattal
◆		
1	A	1.15507
2	B	1.65507
3	C	3.18986

D forlods	E rest
1.	0.15507
1.	0.65507
3.	0.18986

B1	=**a_mandat**

D1	=int(*b1*)

E1	=mod(*b1*,*d1*)

Vi skal så have fat i dels hvor mange tillægsmandater, der er til fordeling, dels i størrelsen af brøkdelene, dvs. resten. Det er nemt nok at finde antallet af tillægsmandater, den største rest og den mindste rest:

H
restantal=
1.
maks_rest=
0.65507
min_rest=
0.15507
indeks_maks=
B
indeks_min=
A

H2	='**n**−sum(**forlods**)

H4	=max(**rest**)

H6	=min(**rest**)

$$H8 \quad = \begin{cases} \text{"A"}, & \mathbf{rest}[1]=h4 \\ \text{"B"}, & \mathbf{rest}[2]=h4 \\ \text{"C"}, & \mathbf{rest}[3]=h4 \end{cases}$$

$$H10 \quad = \begin{cases} \text{"A"}, & \mathbf{rest}[1]=h6 \\ \text{"B"}, & \mathbf{rest}[2]=h6 \\ \text{"C"}, & \mathbf{rest}[3]=h6 \end{cases}$$

Derimod kræver det en betinget kommando at rede trådene ud for hvilken valggruppe, der har den største rest (og dermed er sikker på at få et tillægsmandat) og hvilken valggruppe, der har den mindste rest (og dermed er sikker på IKKE at få et tillægsmandat).

På basis af disse informationer kan vi nu udregne det sikre tillægsmandat, såvel som ekstramandatet, hvis der er 2 til fordeling:

F tillæg	G ekstra
0	1
0	0
1	0

F1	=iffn(h8=a1,1,0)

G1	=iffn(h2=2 and a1≠h8 and a1≠h10,1,0)

Tillægsmandatet går selvfølgelig til den valggruppe, der har den største rest, mens ekstramandatet dels kræver at der er to mandater til fordeling, dels at valggruppen hverken har den største rest (for så har de allerede fået) eller den mindste rest (for så er de ikke berettiget).

Læg mærke til dollartegnene i de to sidste celleformler. De fryser referencen (dvs. det bliver til en absolut reference), så alle tre valggrupper peger på de samme celler, som angiver antallet af rest-mandater, valggruppen med den største rest og valggruppen med den mindste rest.

Lægger vi forlodsmandaterne, tillægsmandaterne og ekstramandaterne sammen fås endeligt den færdige mandatfordeling!

	A valggruppe	B mandattal	C mandatfordeling	D forlods
◆			=forlods+tillæg+ekstra	
1	A	1.82441	2.	1.
2	B	1.27441	1.	1.
3	C	2.90119	3.	2.

Alt er fuldt dynamisk, dvs. tallene opdateres i takt med at vi trækker i valgpunktet ovre i valgtrekanten. Igen kan vi derfor lege med mandatfordelinger i dette dynamiske diagram.

Specielt kan man eksperimentelt undersøge de følgende tre problemstillinger:

Problem 1: Kan en valggruppe få absolut flertal, selvom den har under halvdelen af stemmerne?

Problem 2: Kan en valggruppe gå frem ved et valg (med det samme totale antal vælgere) og alligevel miste et mandat?

Problem 3: Kan en valggruppe miste et mandat, hvis man sætter antallet af mandater op?

Afsluttende bemærkning:

Standardteksten om mandatfordelingsproblemet til A-niveauet er
Ebbe Thue Poulsen: Matematik og retfærdighed, Gyldendal 2000

Men det er behandlet noget simplere flere andre steder fx på Erik Vestergaards hjemmeside:

http://www.matematiksider.dk/mandatfordelinger.html