EXERCICE 5 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n ,$u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i)$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

CORRECTION

EXERCICE 5 **3 points**

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$

Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = z_{n+1} - 4 - 2i$ or d'après les hypothèses, $z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5$

donc $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i$ or $z_n = u_n + z_A = u_n + 4 + 2i$

d'où $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times (u_n + 4 + 2i) + 5 - 4 - 2i$

et ainsi $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n + 2i - 1 + 5 - 4 - 2i$

$= \frac{1}{2} i \times u_n$

On a donc bien prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n}$.

---

1. b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i)$$

D'après la question 1.a., la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2} i$ et de premier terme $u_0 = z_0 - 4 - 2i = -4 - 2i$.

Donc d'après le cours $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2} i\right)^n \Leftrightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i)}$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{AM_n}$ a pour affixe $z_n - z_A = u_n$ et le vecteur $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ a pour affixe $z_{n+4} - z_A = u_{n+4}$

Or $u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}(-4-2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}i\right)^{4}(-4-2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n} \times \frac{1}{16} \times i^4(-4-2i)$ or $i^4 = 1$
donc $u_{n+4} = \frac{1}{16}u_n$ donc $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$, ce qui prouve que $\boxed{A, M_n \text{ et } M_{n+4} \text{ sont alignés}}$.
